등온 가열 평판 위의 Poiseuille 흐름에서 혼합대류의 거동

윤은숙, 최창균*
서울대학교 응용화학부
(ckchoi@snu.ac.kr*)

Mixed Convection in Isothermally Heated Plane Poiseuille Flow

E. S. Yun, C. K. Choi*
School of Chemical Engineering, Seoul National University
(ckchoi@snu.ac.kr*)

서론

부력에 의하여 발생되는 대류의 특성을 아는 것은 많은 열 및 물질 전달계의 설계에 있어서 중요하다. 따라서 본 연구에서는 평판 위의 Poiseuille 흐름에서 혼합유동의 발생 특성과 그 거동을 살펴보겠다.

평판 Poiseuille 흐름에서 유체층의 밑면에 많은 열을 가하면 부력에 의하여 혼합대류가 발생한다[1]. 기본 유동이 존재할 때 열에 의한 혼합대류는 유체의 온도분포가 주 흐름방향의 거리에 따라 변하는 거리 의존형 문제로 볼 수 있다. Kim 등[2]이 제안한 전파이론(propagation theory)은 시간 의존형 문제뿐만 아니라 거리 의존형 문제에도 적용할 수 있는 방법으로 그 타당성이 입증되어 왔다. 그러나 전파이론은 근사해를 도출하므로 본 연구에서는 Prandtl수가 매우 크고, Peclet수가 100이상인 비압축성 뉴튼 유체에 대하여 보다 엄밀한 대류의 거동을 조사하고 실험결과와 비교하였다. 기존의 전파이론을 통하여 얻어진 교란 분포를 근거로 수렴이 확실한 도입부 조건을 정하여 유한요소법(finite element method; FEM)을 사용하여 수치해석을 하였다. 수치해석의 결과를 바탕으로 정의된 성장률에 의하여 계의 불안정성과 혼합대류의 특성을 살펴보았다.

본론

수직거리로 d만큼 떨어져 있는 평판 사이의 완전히 발달된 Poiseuille 흐름에서 밑면이 등온으로 가열되는 계를 생각하자. 유체의 밑면 온도는 T_w , 윗면의 온도는 T_i이다. 점성소산에 의한 에너지 효과는 무시한다. 주 흐름방향이 X축, 가로방향은 Y축, 세로방향은 Z축이다. Boussinesq가정을 도입하여 2차원 연속 방정식, 운동량 방정식, 에너지 방정식을 무차원화하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$6(z-z^2)\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+Pr\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{2}$$

$$6(z-z^2)\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+Pr\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+PrRa\theta \tag{3}$$

$$6(z-z^2)\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}=\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \tag{4}$$

위 식에서 사용된 무차원군들을 살펴보면 $(x,\ y,\ z)=(X/Pe,\ Y,\ Z)/d,\ p=(d^2P)/(\rho_i\alpha^2)$,

$(u, v, w) = (U/Pe, V, W)/(d/\alpha)$, $\theta = (T - T_i)/(T_w - T_i)$, $Ra = [g\beta(T_w - T_i)d^3]/(\alpha\nu)$ 이고 $Pr = \nu/\alpha$이다. Poiseuille 흐름에서 속도 $u = 6(z - z^2)$이다. 여기서 Pe는 Peclet수, Ra는 Rayleigh수, Pr은 Prandtl수, α는 열확산계수, g는 중력가속도, p는 압력, β는 부피팽창계수, ν는 동점도, ρ_i는 유체의 온도가 T_i일 때의 밀도이다.

주어진 계에서 유체의 주 흐름방향으로 2차원 세로방향의 롤(longitudinal roll)이 생긴다고 가정하면, y방향으로 셀(cell)의 모습이 나타나게 된다. 한 셀에 대하여 무차원화된 z방향의 길이는 1이고, y방향의 길이는 π/a이다.(Figure 1 참조) a는 무차원 파수이다. y방향으로 주기적인 셀에 대하여 식 (1)-(4)를 풀기 위한 교란량들에 대한 도입부 조건들을 다음과 같이 가정하였다.

$$\theta'(0, y, z) = A(0)\theta^*(x^*, z)\cos(a\ y) \tag{5}$$

$$w'(0, y, z) = B(0)w^*(x^*, z)\cos(a\ y) \tag{6}$$

$$v'(0, y, z) = -\frac{B(0)}{a}\frac{dw^*(x^*, z)}{dz}\sin(a\ y) \tag{7}$$

여기서 $A(0)$, $B(0)$은 각각 온도와 속도의 도입부의 교란 크기이며, $B(0) = A(0)(w_{\max}/\theta_{\max})$의 관계를 갖는다. $w_{\max}$, $\theta_{\max}$는 x^*에서의 속도, 온도의 최대값이다. x^*는 혼합대류가 발생되는 지점을 나타낸다. 위의 식들은 $0 \le x \le x^*$에서는 동일한 형태를 유지한다는 것을 뜻한다. 본 연구에서 온도는 수평평균과 그것의 요동(fluctuations)의 합인 $\theta = \langle\theta\rangle + \theta'$으로 하며, 속도 분포인 v, w도 역시 $v = \langle v\rangle + v'$, $w = \langle w\rangle + w'$으로 나타낸다. 예를 들어 $\langle\theta\rangle = \int_0^{\pi/a}\theta\, dy\ /\ (\pi/a)$이다. w^*, θ^*는 교란 분포를 정규화(normalization)한 것이다. 본 계에서 Nu는 밑면에서 수평 평균된 값으로 $Nu = \frac{1}{(\pi/a)}\int_0^{\pi/a}\left(-\left.\frac{d\theta}{dz}\right|_{z=0}\right) dy$ 이다.

혼합대류는 x_c에서 처음 발생하고 x_D에서 감지되며 열전달특성은 x_u에서 Nusselt수 Nu가 최소값을 보이게 된다. x_c는 혼합대류가 발생되는 최소거리이다. 특성거리들을 구하기 위하여 주어진 문제를 이산화(discretization)하였다. 메쉬(mesh)는 z방향으로 11, y방향으로 41인 11×41로 사용하였고, 열전달이 급격히 일어나는 밑면은 좀 더 세밀하게 이산화하였다. 또한 본 문제의 경계조건들은 Figure 1과 같다. 구체적인 FEM 알고리즘은 Hughes 등[3]이 제안한 것을 기본으로 하였다.

계의 열 에너지와 운동 에너지를 각각 고려하여 본 연구에서 아래와 같이 새로운 매개변수들을 제안한다.

$$E_0 = \frac{1}{2}\int_\Omega bPrRa\langle\theta\rangle^2\ d\Omega \tag{8}$$

$$E_{TE} = \frac{1}{2}\int_\Omega bPrRa\ \theta'^2\ d\Omega \tag{9}$$

$$E_{KE} = \frac{1}{2}\int_\Omega (v'^2 + w'^2)\ d\Omega \tag{10}$$

이는 Joseph[4]가 제안한 에너지 함수와 유사하다. 위 식을 바탕으로 강제대류 하에서 온도관련 성장률 r_0, 온도 요동량의 성장률 $r_{1,TE}$, 속도 요동량의 성장률 $r_{1,KE}$을 다음과 같이 정의한다.

$$r_0 = \frac{1}{E_0^{1/2}}\frac{dE_0^{1/2}}{dx} \tag{11}$$

$$r_{1,TE} = \frac{1}{E_{TE}^{1/2}} \frac{dE_{TE}^{1/2}}{dx} \tag{12}$$

$$r_{1,KE} = \frac{1}{E_{KE}^{1/2}} \frac{dE_{KE}^{1/2}}{dx} \tag{13}$$

위 식들을 근거로 다음과 같은 판별식들을 제안한다.

$$r_0 = r_{1,TE} \quad at \quad x = x_c \tag{14}$$

$$r_{1,KE} = maximum \quad at \quad x = x_D \tag{15}$$

여기에서 x_c는 위의 식들을 만족하는 최소값, 즉 임계거리이다.

결과 및 토론

$Ra = 10^6$, $Pr \to \infty$, $A(0) = 10^{-3}$일 때, 성장률의 거동은 Figure 2와 같다. r_0은 거리에 따라 감소하고 $r_{1,TE}$와 $r_{1,KE}$는 거리에 따라 증가하다가 결국 모두 0에 가까워지는 것을 알 수 있다. 이 때는 계가 더 이상 변화 없이 완전히 유동이 발전되었다는 것을 말한다. x_c이후에 교란에 의한 성장률이 계속 증가하여 최대가 되는 지점을 각각 $x_{m,TE}$, $x_{m,KE}$ 라 하였다. 이 때 $x_c = 7.8\times10^{-5}$, $x_{m,KE} = 9.17\times10^{-4}$, $x_{m,TE} = 9\times10^{-4}$, $a_c = 19.5$이다. Pr값이 매우 큰 경우에는 $x_{m,KE}$와 $x_{m,TE}$가 거의 같음을 알 수 있다. Figure 3에서 볼 수 있듯이 수치해석으로 구한 Nu는 층류 강제대류 상태의 Nu를 따라 가다가 어떤 지점에서 혼합대류 상태가 된다. 이 Nu값이 최소인 지점을 “undershoot"되는 거리 x_u로 표시하였다. x_u에서부터는 명백한 혼합대류가 발생한다고 볼 수 있다. 또한 $x_c < x_D < x_u$의 관계를 갖고, Pr이 매우 큰 경우 $x_D \simeq x_{m,KE} \simeq x_{m,TE}$인 것으로 판단된다.

도입부 온도교란 크기 $A(0)$을 다양하게 변화시켰을 때의 성장률의 거동은 Figure 4에서 볼 수 있다. Figure 4에서 알 수 있듯이 r_0은 모든 경우에 일치하였고, $r_{1,TE}$는 최대값이 되기 전까지는 모두 같다. $A(0)$값이 변하면 대류 불안정성이 시작되는 지점인 x_c는 일정하지만 $x_{m,TE}$, $x_{m,KE}$ 그리고 x_u값은 점점 앞으로 당겨진다.

수치해석으로 얻은 결과가 실험결과를 얼마나 잘 나타낼 수 있는가는 Figure 5에서 볼 수 있다. 여기에 나타난 실험결과는 McLarnon 등[5]이 전기화학 계에서 혼합대류 발생에 관한 물질 전달량을 바탕으로 x_u를 구한 것이다. 이는 $Pr = O(10^3)$에 해당되는 결과이다. Figure 5에서 보는 바와 같이 도입부 온도 교란 $A(0)$이 0.08일 때 수치해석으로 구한 x_u가 실험결과 x_u와 잘 맞는다는 것을 알 수 있다. $A(0)$값이 감소하면 x_u값이 커진다.

도입부 온도교란 크기가 변함에 따라 x_D와 x_u값은 변하지만 x_c값은 변함이 없다. 따라서 본 연구에서 구한 x_c값은 보다 타당성이 있는 임계조건이라고 말할 수 있다. 이에 관하여 연구가 진행되고 있다.

참고문헌

1. Y. Kamotani, S. Ostrach, *ASME Journal of Heat Transfer*, 98, 62(1976).
2. M. C. Kim, J. S. Baik, I. G. Hwang, D. Y. Yoon, C. K. Choi, *Chem. Engng. Sci.,* 54, 619(1999).
3. T. J. R. Hughes, K. S. Pister, and R. L. Taylor, *Comp. Meth. Mech. Engng.*, 17/18, 159(1979).
4. D. D. Joseph, "Stability of Fluid Motions Ⅱ", Springer Tracts in Natural Philosophy, 28(1976).

5. F. R. McLarnon, R. H. Muller, C. W. Tobias, *J. Electrochem. Sci.,* 129, 2201(1982).

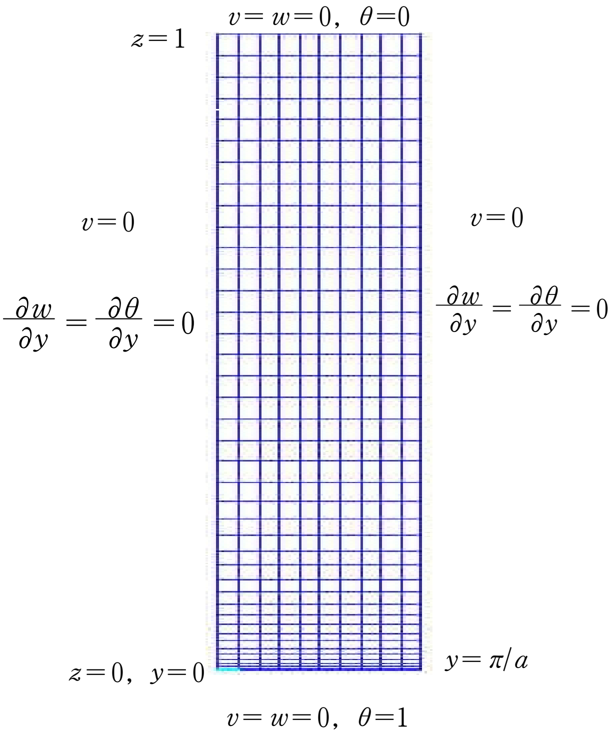

Fig. 1. Finite element meshes and boundary conditions

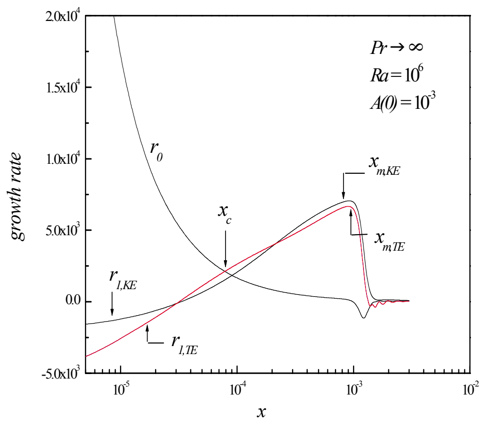

Fig. 2. Behavior of growth rates

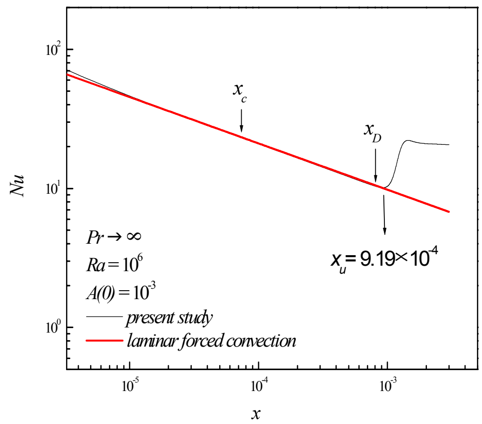

Fig.3. Deviation from laminar forced convection

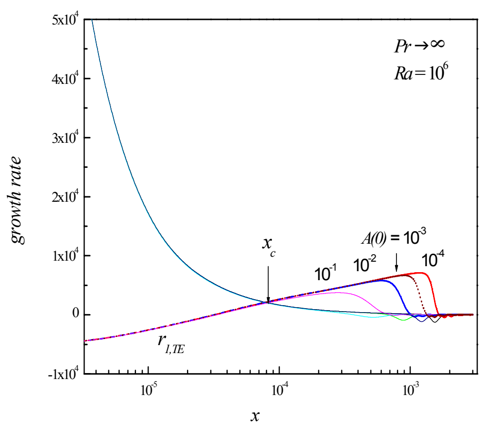

Fig. 4. Growth rates of temperature fluctuation

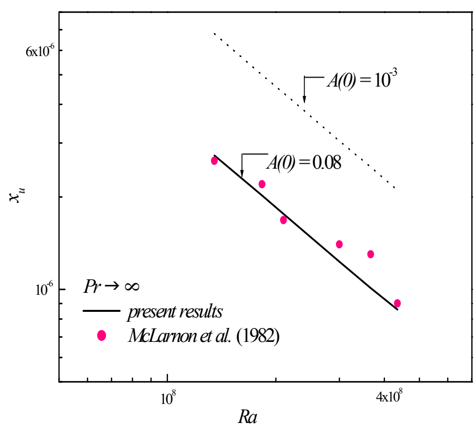

Fig. 5. Comparison of present results with available experimental data