

## 위에서 냉각되어지는수평 유체층에서 유동 불안정성 및 열전달에 관한 연구

강 경훈, 최 창균, 김 민찬\*  
 서울대학교 화학공학과, 제주대학교 화학공학과\*

**A STUDY OF CONVECTIVE INSTABILITY AND HEAT TRANSFER  
 IN A HORIZONTAL FLUID LAYER COOLED UNIFORMLY FROM ABOVE**

**K. H. Kang, C. K. Choi\* and M. C. Kim\*\***  
 Department of Chemical Engineering, Seoul National University\*  
 Department of Chemical Engineering, Cheju National University\*\*

**서론**

냉각이나 가열로 인하여 발생하는 유체의 부력, 표면장력의 변화가 유체를 안정화하려는 힘보다 커지게 되면 유체층에서 대류가 발생하는 것은 널리 알려진 현상이다. 충분히 발달된 선형 온도 분포계에 대한 자연대류 임계 조건은 Rayleigh 와 Pearson 에 의해 해석되었으나 시간 의존형인 비선형 온도 분포에 대한 임계 조건의 해석에 있어서 많은 논란이 있어 왔다. 초기에 정지 상태에 있는 수평 유체층을 갑자기 일정 열속으로 냉각하여 강한 비선형 온도 분포를 보이는 계에서 부력과 표면장력의 변화에 의해 발생하는 자연대류의 임계 조건을 여러 연구를 통하여 타당성이 입증된 바 있는 전파이론(propagation theory)을 적용하여 해석하였다. 또한 부력과 표면장력의 변화에 의해 발생된, 충분히 발달된 난류 유동의 열전달 상관식을 전파 이론에서의 안정성 조건, boundary-layer instability 모델, power integral 모델 등을 사용하여 도출하였다.

**이론 및 결과**

윗면이 자유 경계면이고 아랫면이 고정 경계면인 수평 정지 유체층이 고려되어 졌다. 초기에 일정 온도  $T_i$  로 유지되는 유체층이 시간  $t=0$  에서 일정 열속  $q$  로 냉각되기 시작한다. 임계 가열 열속을 초과하면 표면 장력과 부력의 변화에 의해 대류가 발생하게 된다. 이 경우에 중요한 인자들은  $Ra_q$  수(= $g\beta qL^4/k\alpha\nu$ ),  $Ma_q$  수(= $\gamma qL^2/\mu\alpha$ ),  $Pr$  수(= $\nu/\alpha$ ),  $Nu$  수(= $Q_{actual}/Q_{conduction}$ ) 이다.  $g, \beta, L, k, \alpha, \nu, \mu, \gamma$  은 각각 중력 가속도, 부피팽창 계수, 유체층 깊이, 열전도도, 열확산 계수, 점도, 온도에 대한 표면장력의 음의 기울 기를 나타낸다. 기본 온도 분포가 선형이고 충분히 발달된 상태에서 자연대류 발생 임계값은 각각  $Ra_c=69, Ma_c=79.6$  으로 알려져 있다. 선형 안정성 이론을 도입하면 무차원화된 운동, 에너지 교란식을 얻을 수 있다.

$$\text{운동 교란식} \quad \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} - \nabla^2\right) \nabla^2 w_1 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \theta_1$$

$$\text{에너지 교란식} \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + Ra w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \nabla^2 \theta_1$$

$w_1, \theta_1, \tau$  은 각각  $\alpha/L, qL/(kRa_q), L^2/\alpha$  으로 환산된 속도, 온도교란량, 무차원 시간이다. 충분히 작은 시간에서 유체층의 깊이가 열 침투 깊이 에 비하여 클 때 유체층은 deep-pool 계로 해석되어 질 수 있다. deep-pool 계에 대한 안정성 해석을 위해서 전파이론을 사용하였다. 전파이론하에서 상사 변수  $\zeta(=z/\tau^{1/2})$  를 도입하여 충분히 작은 시간에서의 deep-pool 계에 대한 안정성 식은 다음과 같다.

$$[(D^2 - a^{*2})^2 + \frac{1}{2Pr}(\zeta D^2 - a^{*2}(\zeta D + 2a^{*2}))]w^{*2} = -a^{*2}\theta^*$$

$$[D^2 + \frac{1}{2}\zeta D - a^{*2}]\theta^* + Ra^*w^*D\theta_0 = 0$$

B. C.'s :  $w^* = D\theta^* = D^2w^* - \frac{Ma^*}{Ra^*}a^{*2}\theta^* = 0$  at  $\zeta = 0$

$w^* = Dw^* = \theta^* = 0$  for  $\zeta \rightarrow \infty$

D 는  $\zeta$  에 대한 미분을 나타내고  $w^*$  와  $\theta^*$  은 교란량들이 무한 평판에서 주기적 파동을 보인다는 가정하에 아래와 같이 변환된 속도, 온도 교란량이다.

$$[w^*(\zeta), \theta^*(\zeta)] = [\tau^{-1}w_1(\tau, \zeta), q_1(\tau, \zeta)] \exp[-i(a_x x + a_y y)]$$

위의 안정성 식에서 나타나는 무차원 인자인  $a^*(=\tau^{1/2}a)$ ,  $Ma_q^*(=\tau Ma_q)$ ,  $Ra_q^*(=\tau^2 Ra_q)$  은 교란식에서 고유치로 간주되어 해석한다. 주어진 Pr 수,  $Ma_q^*$  수에 대하여  $Ra_q^*$  수의 최소값과 이에 대응하는  $a_c^*$  의 값을 수치적으로 구한 결과 아래와 같은 자연대류 발생 임계 시점에 대한 상관식을 구할 수 있었다.

$$\tau_c = 2.54(1 + \frac{1.25}{Pr^{0.72}})^{0.70} Ra_q^{-1/2} \quad \text{for } Ma_q=0$$

$$\tau_c = 11.0(1 + \frac{0.75}{Pr^{0.68}})^{1.27} Ma_q^{-1} \quad \text{for } Ra_q=0$$

이와 같은 임계 조건은 기존의 실험값과 잘 일치하며 이를 도시한 그림은 Fig. 1 에 나타나 있다. 자연대류 발생 시점에서 온도, 속도 교란량은 교란량의 성장과 관련한 열전달 해석에 중요한 조건으로 작용한다. 속도, 온도 교란량을 각각의 최대값으로 정규화하여 Pr 변화에 따른 결과를 Fig. 2 에 나타내었다. Pr 수가 증가함에 따라 최대 속도 교란량의 위치가 윗면에서 먼 쪽으로 이동함을 볼 수 있다.

$Ma_q$  수와  $Ra_q$  수를 증가시키면 즉 열속을 증가시키면 전도에 의해서만 전달되는 열전달량에 자연 대류에 의한 열전달량이 추가 되므로 증가하므로 Nu 수,  $Ma_q$  수,  $Ra_q$  수 사이의 상관 관계를 구하는 시도가 많이 이루어 지고 있다. 본 연구에서는 중력의 효과를 무시할 수 있는 얇은 유체층에 대하여, 즉  $Ra_q \approx 0$  인 경우 발생한 자연대류에 의해 증가된 열전달량을 power integral 모델에 의하여 이론적으로 구하였다. power integral 모델의 핵심은 속도와 온도 분포의 크기가 중립 선형 안정성에서 상응하는 임계 속도와 임계 온도 분포의 곱으로 나타내어 진다는 것이다. 앞에서 정의된 Nu를 냉각되는 일정 열 속  $q$  를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$Nu = \frac{Q_{actual}}{Q_{conduction}} = 1 + \frac{\int_0^1 w_1 \theta_1 dz}{1 - \int_0^1 w_1 \theta_1 dz} \quad \text{for } Ra_q=0$$

이와 같이 정의된 Nu 를 power integral 모델을 적용한 결과는 다음과 같다.

$$Nu = 1 + \frac{\phi_q (1 - \frac{79.6}{Ma_q})}{1 - \psi_q (1 - \frac{79.6}{Ma_q})} \quad \text{for } Ra_q=0$$

단,  $\phi_q=0.642$  이다. Fig. 3 에서 보여지는 바와 같이 초기 기울기는  $\phi_q/79.6$  이다. 이와 같은 결과를 Marangoni 대류에 적용하는 경우 열속의 크기가 작은 경우에 한정된다.

부력의 변화에 의해 발생된 난류 유동 열전달 상관식에 대해 Busse 등이 제안한 boundary layer instability 모델을 도입하면 Nu 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Nu = \frac{Q_{\text{actual}}}{Q_{\text{conduction}}} = \frac{k\Delta T_{\delta} / \delta}{k\Delta T / L} \cong \frac{1}{2} \frac{L}{\delta}$$

여기에서  $\delta$  은 열경계층 깊이이다. 또한 Long 과 Cheung 이 충분히 큰  $Ra_q$  인 경우 이론적으로 제안한 열전달 상관식은 아래와 같다.

$$Nu = \frac{C_1 Ra_q^{1/4}}{1 - C_2 Ra_q^{-1/12}} \quad \text{for large } Ra$$

$C_1, C_2$  은 경험 상수이다. 이러한 상관식을 자연대류가 발생하는 시점에서의 열전달 깊이를 매개로 앞에서 구한 안정성 조건과 결합하면

$$Nu = 1 + \frac{A(Ra_q^{1/4} - 669^{1/4})}{1 - B Ra_q^{-1/12}} \quad \text{for } Ra \geq 669$$

와 같이 부력에 의해 발생한 난류에서의 열전달 상관식을 얻을 수 있다. 단  $A=0.13$  [ $1+1.25/Pr^{0.721-0.39}$ ] 이고  $B=1.72-3.27A$  이다. Pr 의 영향은  $Pr \geq 10$  경우에 대하여 무시할 수 있다. Fig. 4 에 위의 상관식을 도시하였으며 실리콘 오일에 대한 Hinkebein 와 Berg 의 실험과 비교하였다.

### 결론

윗면이 자유 경계면인 유체층이 일정 열 속으로 냉각되어 부력과 표면장력의 변화에 의하여 자연대류가 발생하는 계에 대하여 전파이론을 적용하여 임계 시점을 구하였다. 또한 부력과 표면장력의 변화에 의해 충분히 발달되어진 된 난류 유동의 열전달 상관식을 전파 이론에서의 안정성 조건, boundary-layer instability 모델, power integral 모델 등을 사용하여 도출하였고 실험 결과와 잘 일치함을 알 수 있었다.

### 참고문헌

1. Busse, F. H.: *J. Math. Phys.*, **46**, 140 (1967).
2. Cheung, F. B. : *J. Fluid Mech.*, **97**, 734 (1980).
3. Cheung, F. B., Smith, S. W. and Cho, D. H.: *J. Heat Transfer*, **113**, 919 (1991).
4. Hinkebein, T. E. and Berg, J. C.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **21**, 1241 (1978).
5. Kim, M. C., Choi, C. K. and Yoon, D. Y.: An Analysis of the Onset of Marangoni Convection during Liquid Evaporation, *Transport Phenomena in Heat & Mass Transfer*, **1**, 247, Elsevier, Amsterdam (1992).

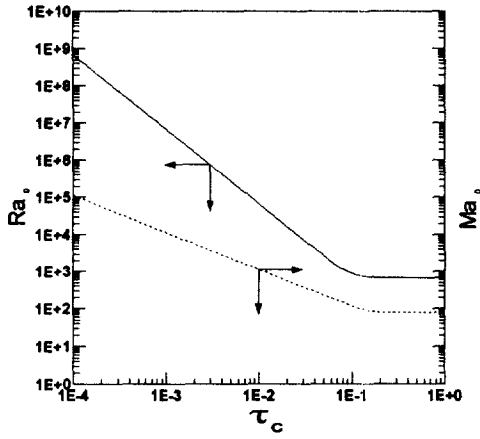


Fig. 1. Critical time at  $Pr=100$

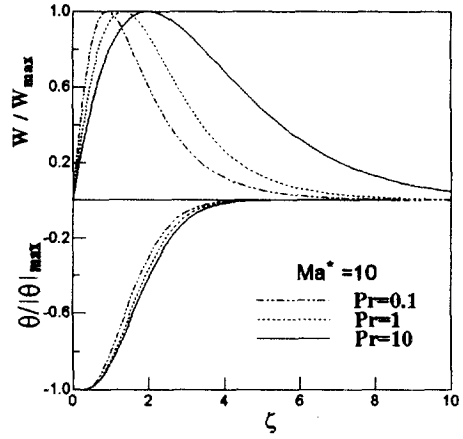


Fig. 2. Amplitude profiles for  $Ma^* = 10$

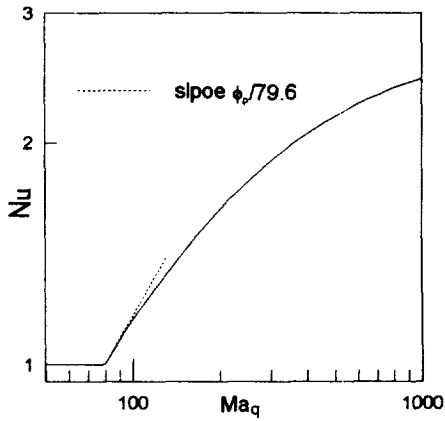


Fig. 3.  $Nu$  versus  $Ma_q$

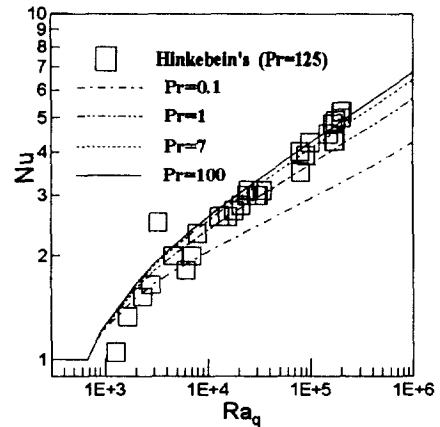


Fig. 4.  $Nu$  versus  $Ra_q$