

5.CM실패:흑체복사

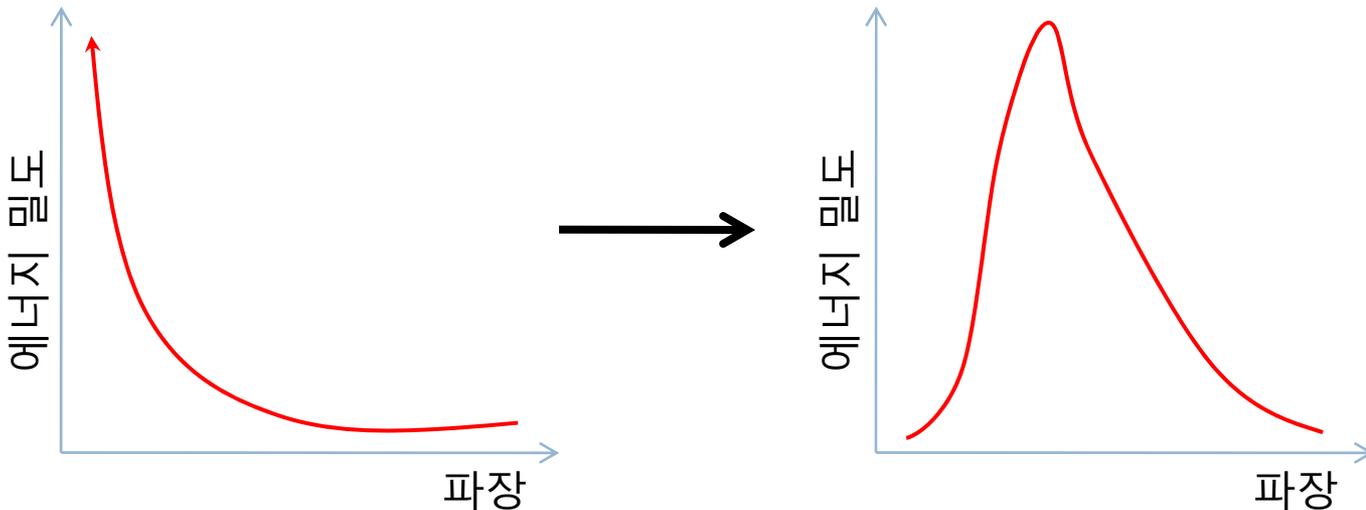
화공과 김영훈 교수

korea1@kw.ac.kr

고전물리학의 실패 1

2

- 전자기파 열복사 스펙트럼
 - ▣ 열복사: 온도에 따른 복사 전자기파가 다르다
 - ▣ 고온일수록 짧은 파장의 전자기파 방출한다
 - ▣ X-선은 10억도 물체에서 방출된다
 - ▣ X-선에 노출되면 타 죽는가??



CM으로 설명 불가능한 현상들

3

- 19C 말 물리화학(양자역학)의 화두
 - 흑체 복사 (Blackbody radiation)
 - 고체의 열용량 (Heat capacity of solid)
 - 광전 효과 (Photoelectric effect)
 - 수소의 휘선스펙트럼 (Spectrum of H atom)
 - 콤프턴 효과 (Compton effect)
 - 고체의 전자회절 (Electron diffraction from solid surface)
- 모두 빛의 파동성에 위배되는 현상들
 - 입자성으로 설명 시도 → 양자론 탄생

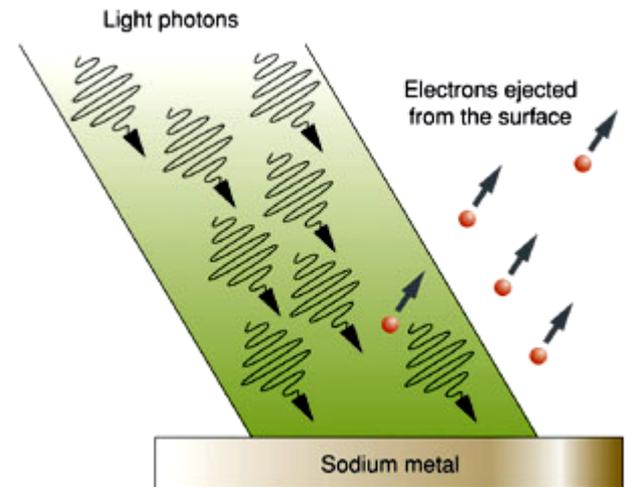
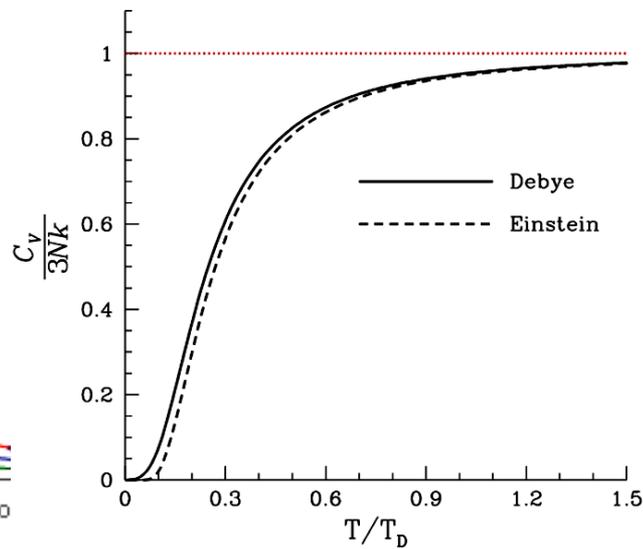
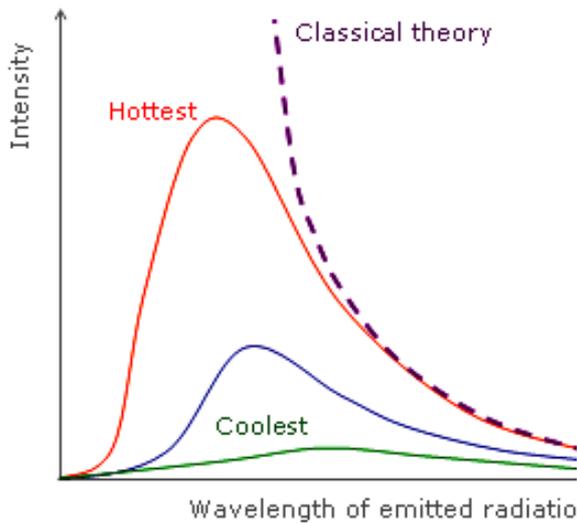
요약: 흑체복사, 고체열용량, 광전효과

4

□ 흑체복사

□ 고체열용량

□ 광전효과



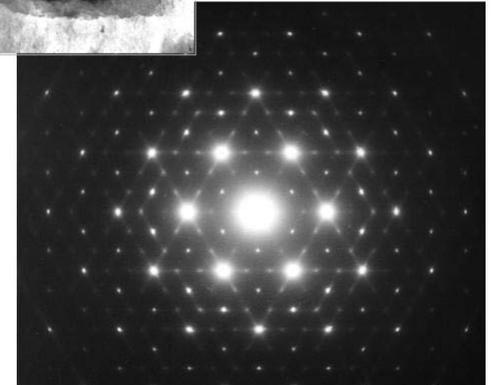
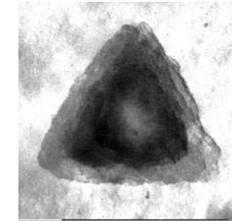
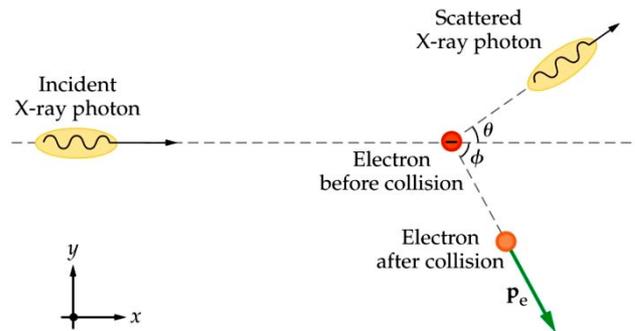
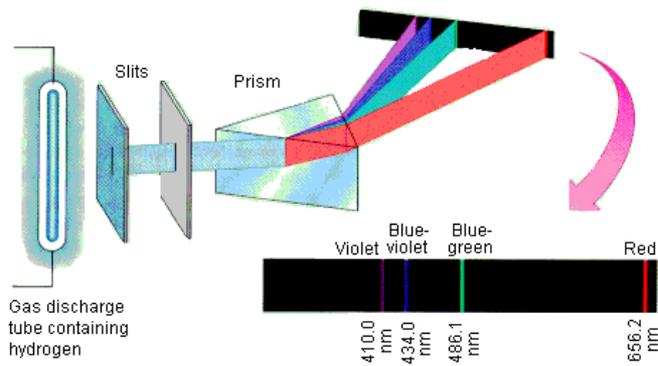
요약: 수소회선, 콤프턴효과, 고체회절

5

□ 수소회선

□ 콤프턴효과

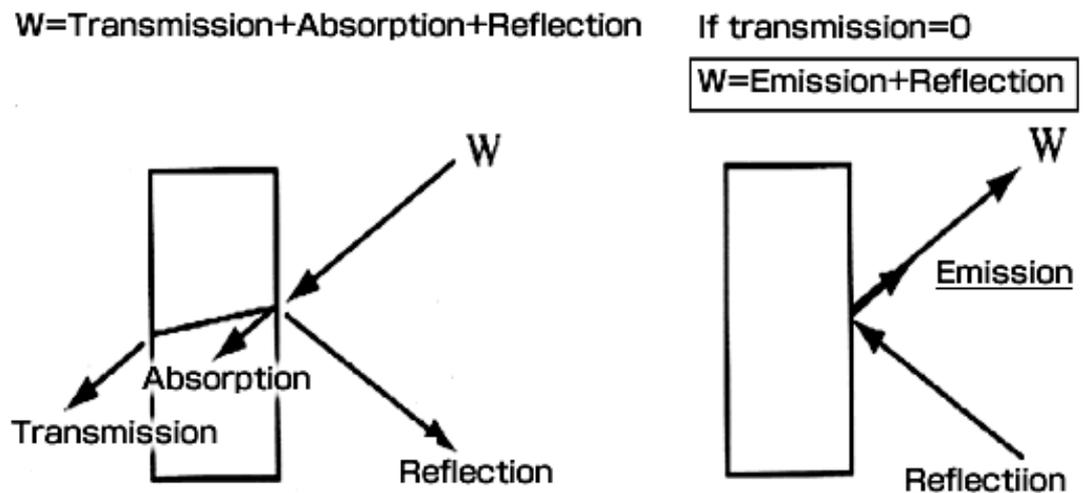
□ 고체회절



흑체란

6

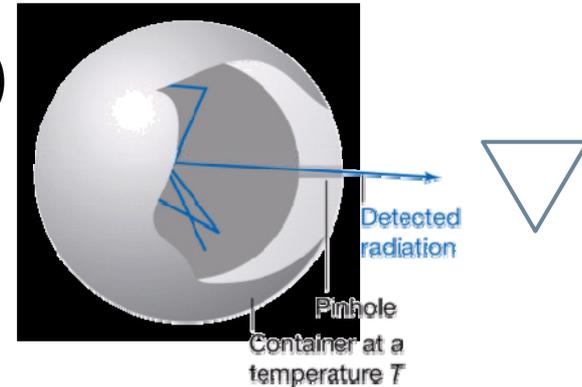
- 흑체(blackbody)=ideal body
 - 주어진 빛을 완전흡수, 완전반사하는 가상체
 - $a(\lambda)=1$ (100% absorption), $e(\lambda)=1$ (100% emission)
 - Absorptivity, $a(\lambda)$: reflection없이 absorption될 비율
 - Emissivity, $e(\lambda)$: reflection없이 emission될 비율
 - Graybody: imperfect absorber or emitter
 - $a(\lambda) < 1$, $e(\lambda) < 1$



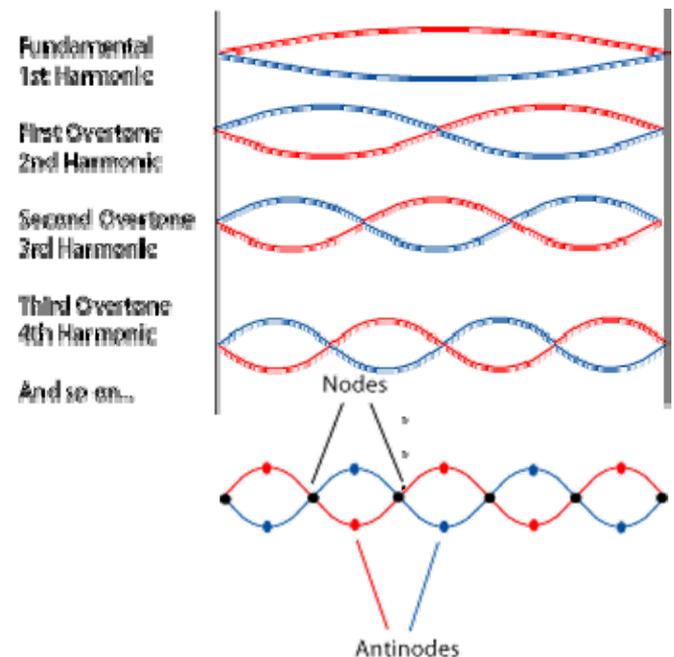
흑체복사

7

- Blackbody(cavity radiation)
 - 진공상태인 검은상자 가열
→ 진공에서 열전달?
 - 열복사에 의해 수많은 전자
기파 발생 → 내벽에서 완전
흡수/완전반사
 - 복사된 에너지는 정상파
(standing wave)발생
 - Pinhole을 통해 방출되는 빛
을 관찰하여 색과 온도관계
도출

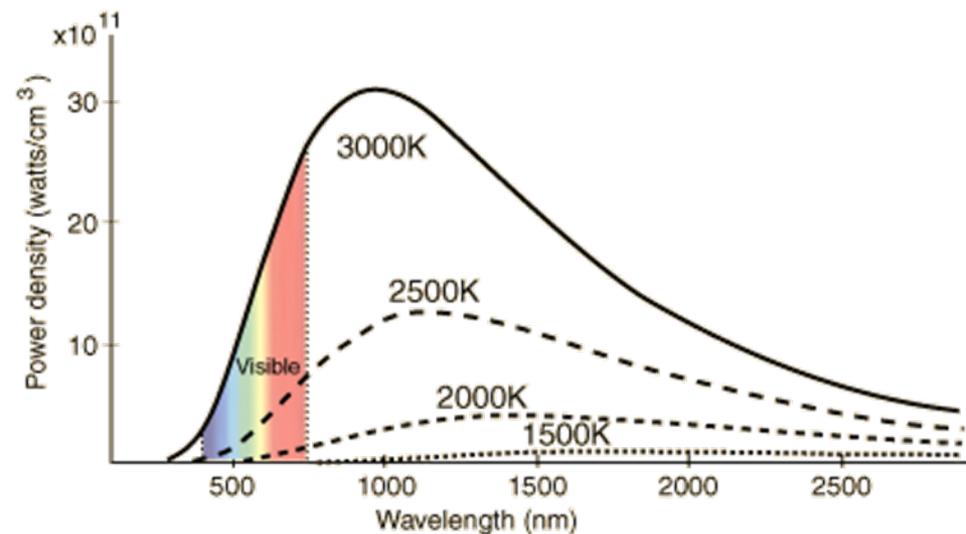
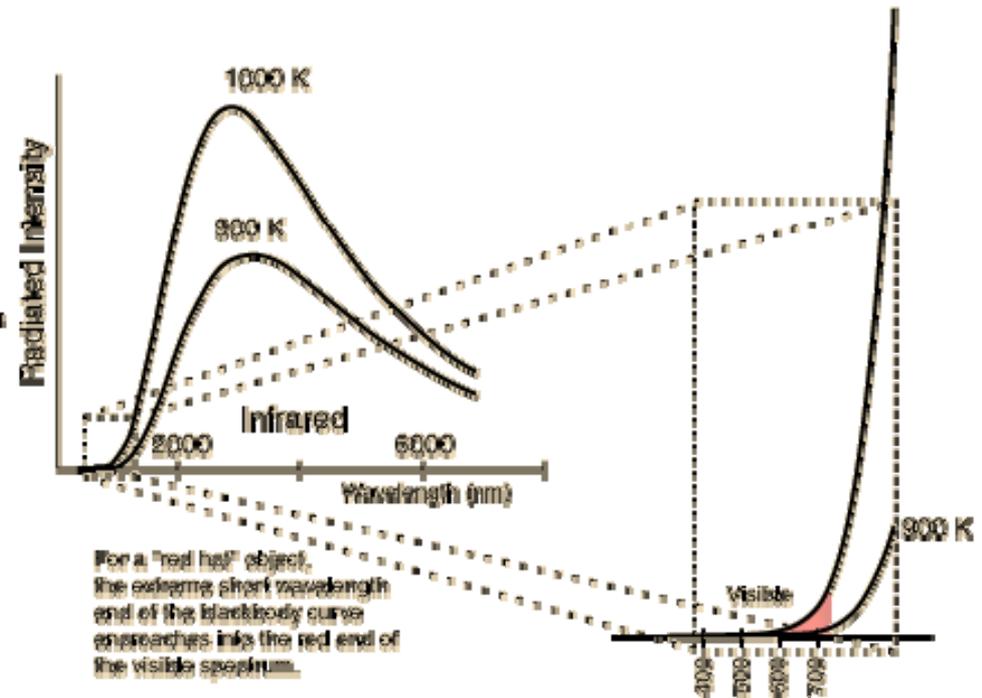
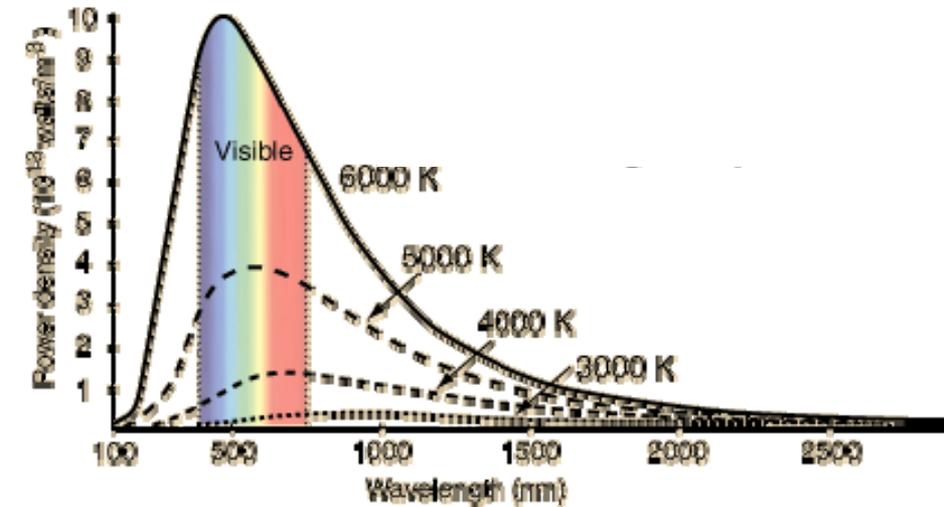


광량측정

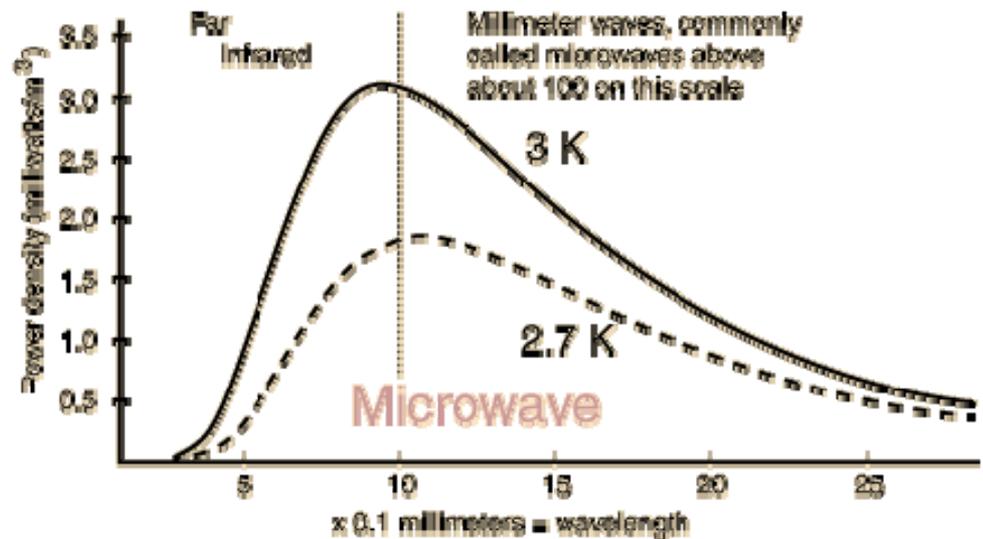
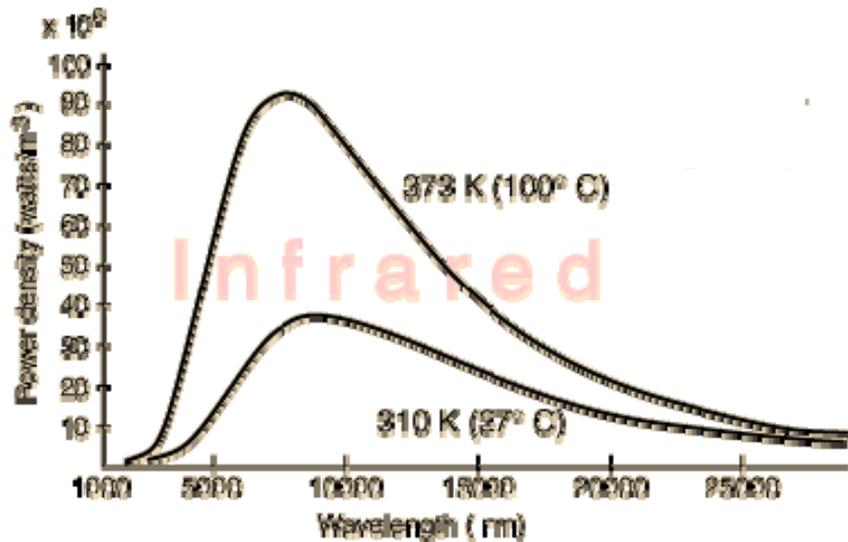


6000K, 3000K, red hot에서 복사선

8



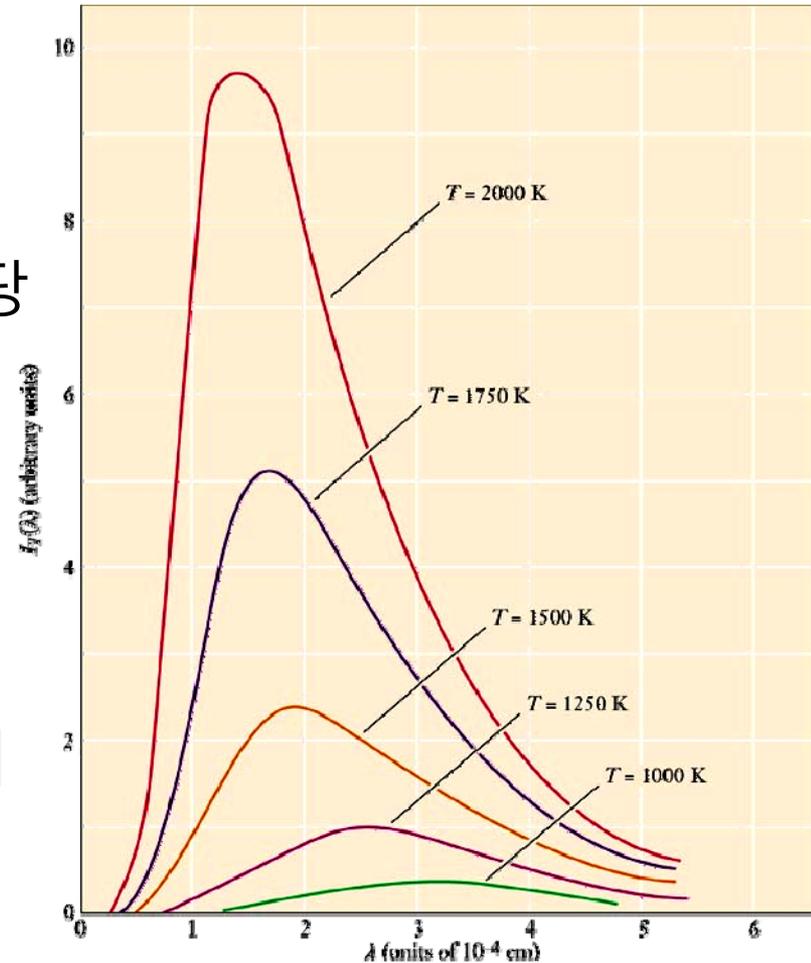
300K, 3K에서 복사선



흑체복사 실험결과

10

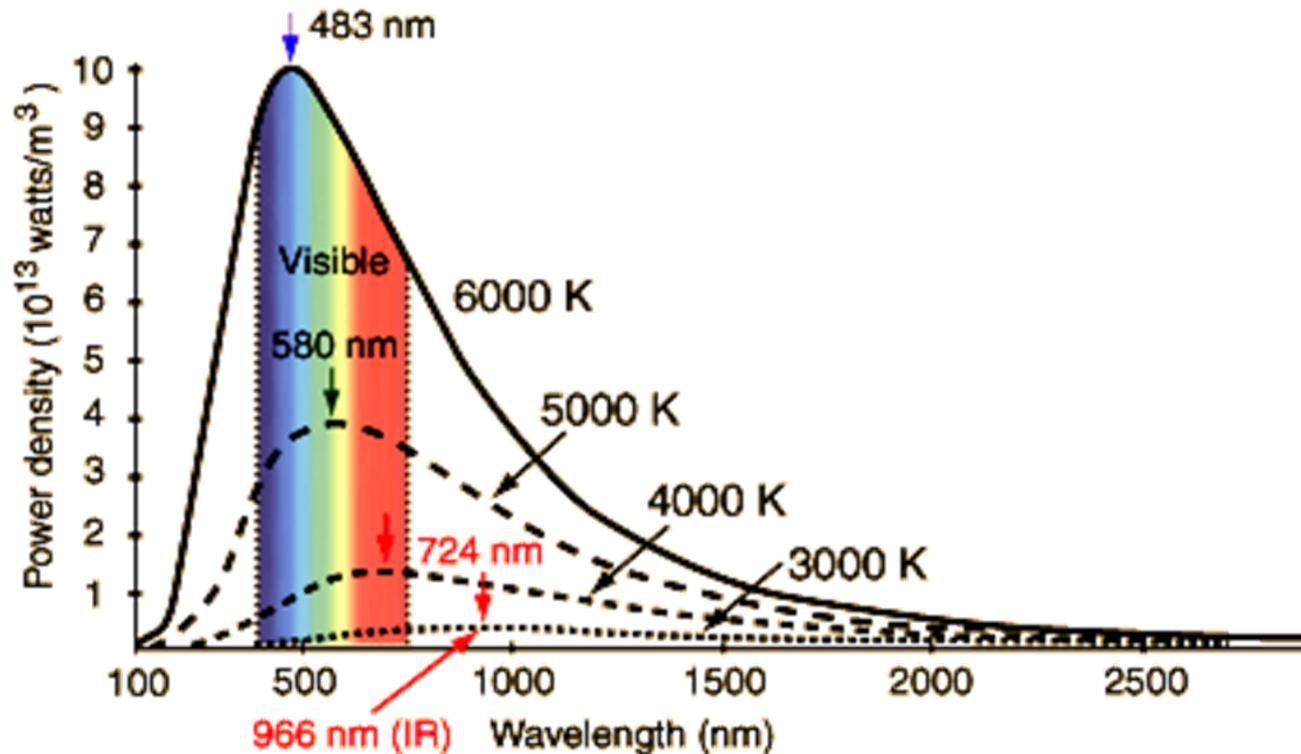
- 흑체복사 결과로 3가지 CM 해석 도출
 - Wien displacement law
 - 해당온도의 최대파장과 해당 온도의 곱은 일정
 - Stefan-Boltzmann law
 - 복사되는 에너지는 온도4승에 비례
 - Rayleigh-Jeans law
 - 상태밀도와 파동의에너지의 곱이 복사에너지



빈의 변위법칙

11

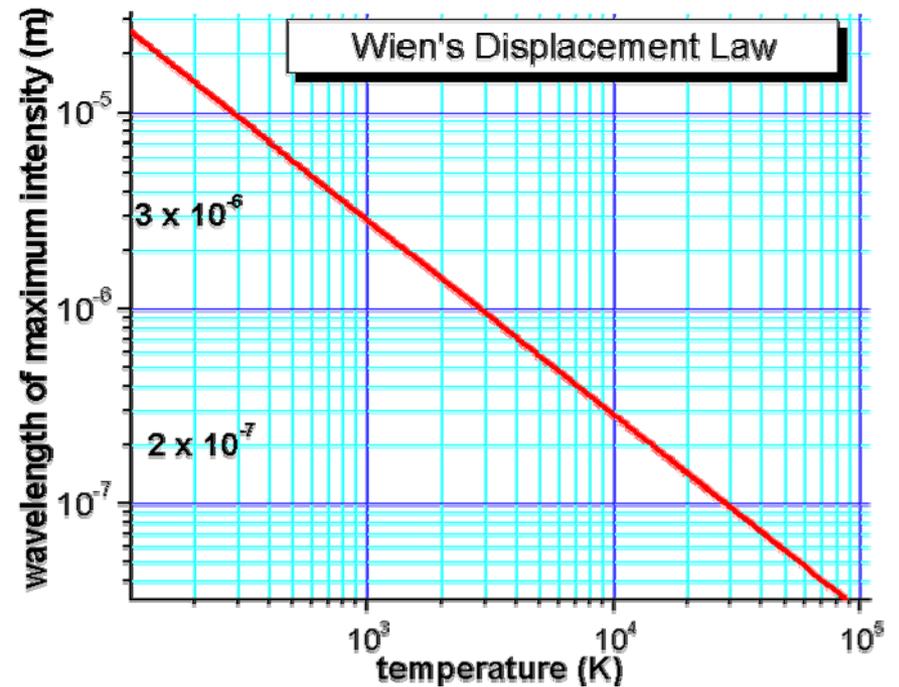
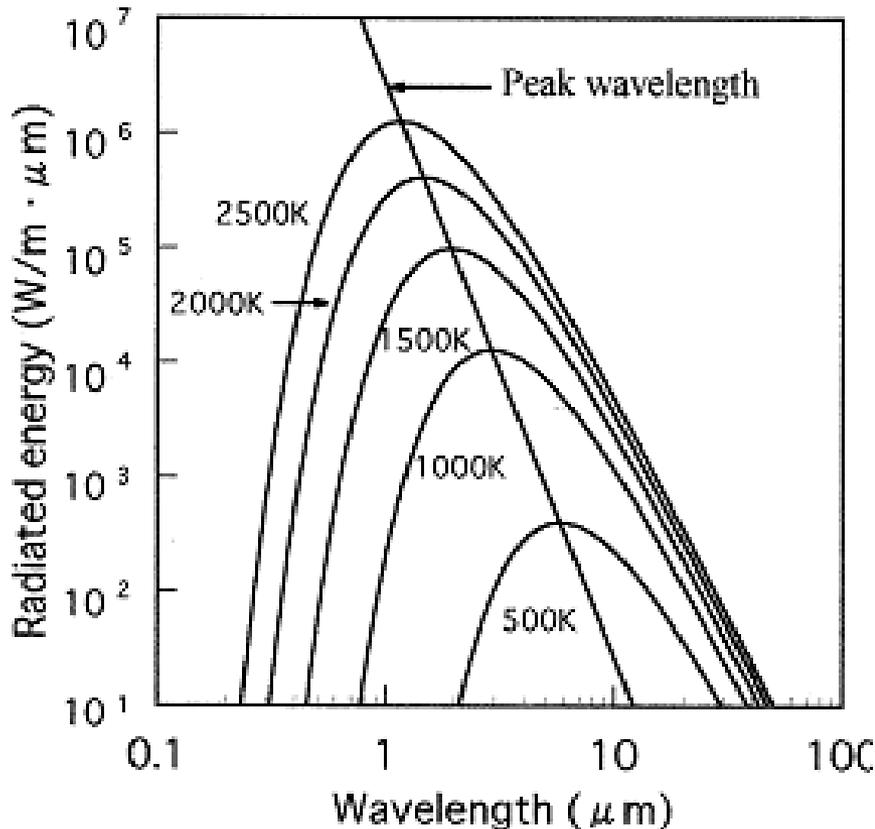
- Wien displacement law
 - ▣ 해당온도의 최대파장과 해당온도의 곱은 일정
 - ▣ $\lambda_{\text{peak}} T = \text{const.} = 2.898 \times 10^{-3} \text{ mK}$



빈의 법칙 적용분야

12

- 주로 고온에 적용
 - ▣ 고온의 별의 온도 측정시 용이



스테판-볼츠만 법칙

13

□ Stefan-Boltzmann law

- 흑체복사에 의해 단위면적, 단위시간당 복사되는 에너지는 T^4 에 비례

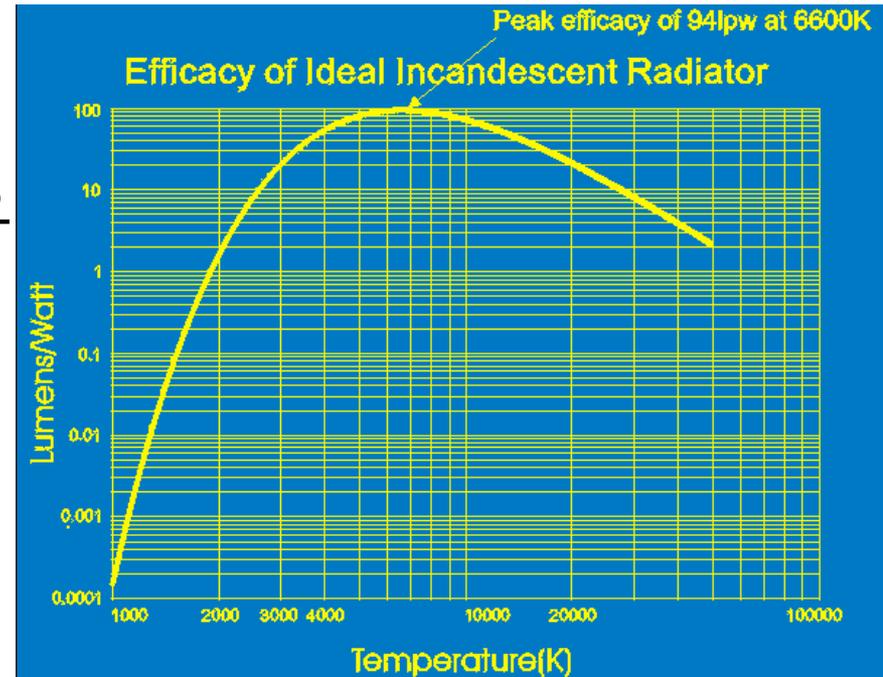
$$\frac{P}{A} = \sigma T^4 \text{ j/m}^2\text{s} \quad \text{Stefan-Boltzmann Law}$$
$$\sigma = 5.6703 \times 10^{-8} \text{ watt/m}^2\text{K}^4$$

- 이상 복사체가 아닌 경우

$$\frac{P}{A} = e\sigma T^4$$

- 차가운 주변으로 복사시

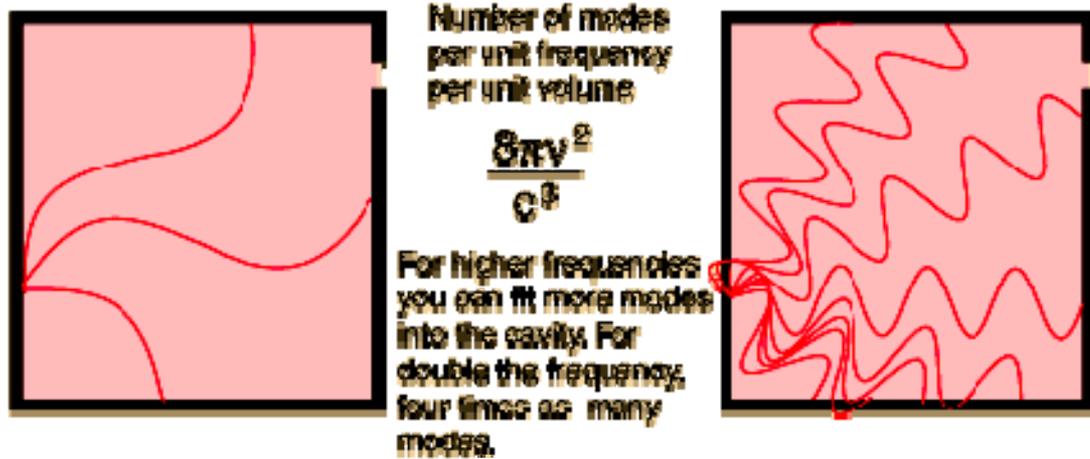
$$P = e\sigma A(T^4 - T_c^4)$$



상태밀도: cavity mode(=quantum)

14

- 실험값 모사 위해 “동공내 파동” 개념 도입
 - ▣ 짧은 파장일 수록 동공내 정상파 종류 다양
 - ▣ 여러종류의 정상파 발생빈도=상태밀도(ρ)
 - ▣ 공간내 양자수, n_s



$$\rho(\nu) = \frac{dn_s}{d\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \quad \longleftrightarrow \quad d\lambda = \frac{c}{\nu^2} d\nu \quad \rho(\lambda) = \frac{dn_s}{d\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4}$$

상태밀도 계산: 파동방정식

15

□ 3D wave eq.

□ 지배방정식

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

□ 일반해

$$E = E_0 \sin \frac{n_1 \pi x}{L} \sin \frac{n_2 \pi y}{L} \sin \frac{n_3 \pi z}{L} \sin \frac{2\pi c t}{\lambda}$$

□ 해를 지배방정식 적용

$$\left[\frac{n_1 \pi}{L} \right]^2 + \left[\frac{n_2 \pi}{L} \right]^2 + \left[\frac{n_3 \pi}{L} \right]^2 = \left[\frac{2\pi}{\lambda} \right]^2$$

□ 단순화

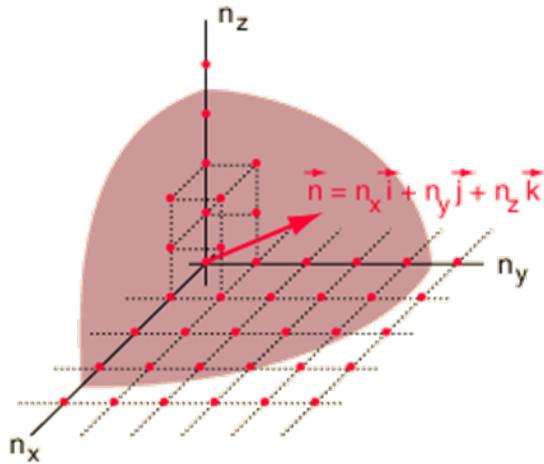
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2}$$

- 공간내 mode(정상파) 벡터의 방향 스칼라 성분

상태밀도 계산: 공간내 모드수

16

- # of mode in cavity



$$\text{"volume" of } n\text{'s} = \frac{4\pi}{3} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{3/2}$$

$$\text{Number of modes} = N = \frac{\pi}{3} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{3/2} = \frac{8\pi L^3}{3\lambda^3}$$

- # of mode/wavelength = 상태밀도

$$\frac{dN}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{8\pi L^3}{3\lambda^3} \right] = -\frac{8\pi L^3}{\lambda^4}$$

$$\frac{\text{Number of modes per unit wavelength}}{\text{Cavity volume}} = -\frac{1}{L^3} \frac{dN}{d\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4}$$

에너지 균등분배 원리

17

- Energy equipartition
 - Maxwell+Boltzmann 연구에 기초
 - 열적 평형상태인 계의 분자는 각각 독립된 에너지 상태의 동일한 양의 에너지가 부여된다
 - 모든 사물은 분자로 구성 → 분자운동으로 열 발생
 - 즉, 자유도와 관련 → 자유도 클수록 E 증가

$$\frac{1}{2}kT \text{ per molecule}$$
$$\frac{1}{2}RT \text{ per mole}$$

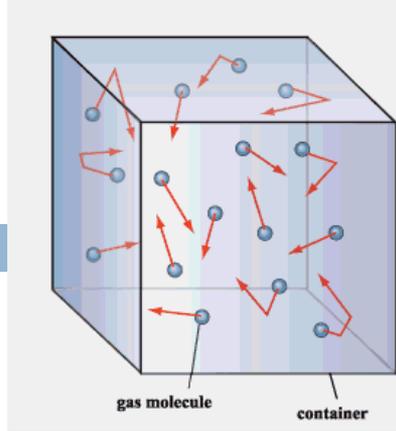
k = Boltzmann's constant
R = gas constant

$$\frac{3}{2}kT$$
$$\frac{3}{2}RT$$

For three translational degrees of freedom, such as in an ideal monoatomic gas.

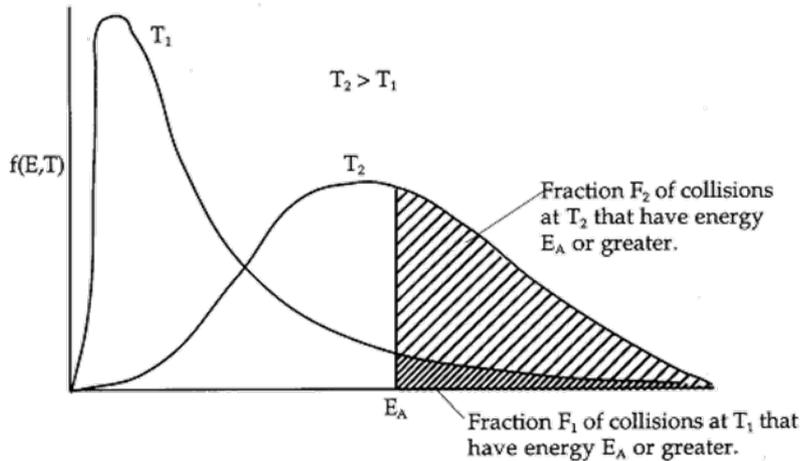
$$KE_{\text{avg}} = \left[\frac{1}{2} \overline{mv^2} \right] = \frac{3}{2}kT$$

평균 모드 에너지 <E>



Maxwell-Boltzmann distribution

특정 온도에서 다양한 분자속도의 확률분포



With increasing energy E , it is progressively less likely that any given particle will attain that energy, so more particles will be found with lower energies. It is assumed that an unlimited number of particles can occupy any energy state.

The probability that a particle will have energy E .

$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT}}$$

Maxwell-Boltzmann

Normalization constant A

The probability for occupying a given energy state decreases exponentially with energy

Boltzmann's constant k times the absolute temperature T . The implication of this term is that for a higher temperature, it is more probable that a given particle can be found with energy E .

Average energy integral

$$\langle E \rangle = \frac{1}{kT} \int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE$$

$$\frac{1}{kT} \int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE = \frac{E}{kT} (kT e^{-E/kT}) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{kT} \int_0^{\infty} kT e^{-E/kT} dE$$

$= 0$

$$\langle E \rangle = -kT \int_0^{\infty} e^{-E/kT} d\left(\frac{-E}{kT}\right) = -kT e^{-E/kT} \Big|_0^{\infty} = kT$$

레이레이-진의 법칙

19

- Rayleigh-Jeans law
 - 철저히 CM에 입각한 흑체복사 해석
 - “빛=정상파”(mode)로 간주한 상태밀도 해석
 - → 추후 mode는 quantum으로 대체
 - 볼츠만의 에너지 균등분배원리에 바탕한 mode당 에너지: $\langle E \rangle = kT$
 - Spatial energy($du/d\lambda$) = state density(ρ) x mode energy($\langle E \rangle$)

자외선 파탄현상 발생

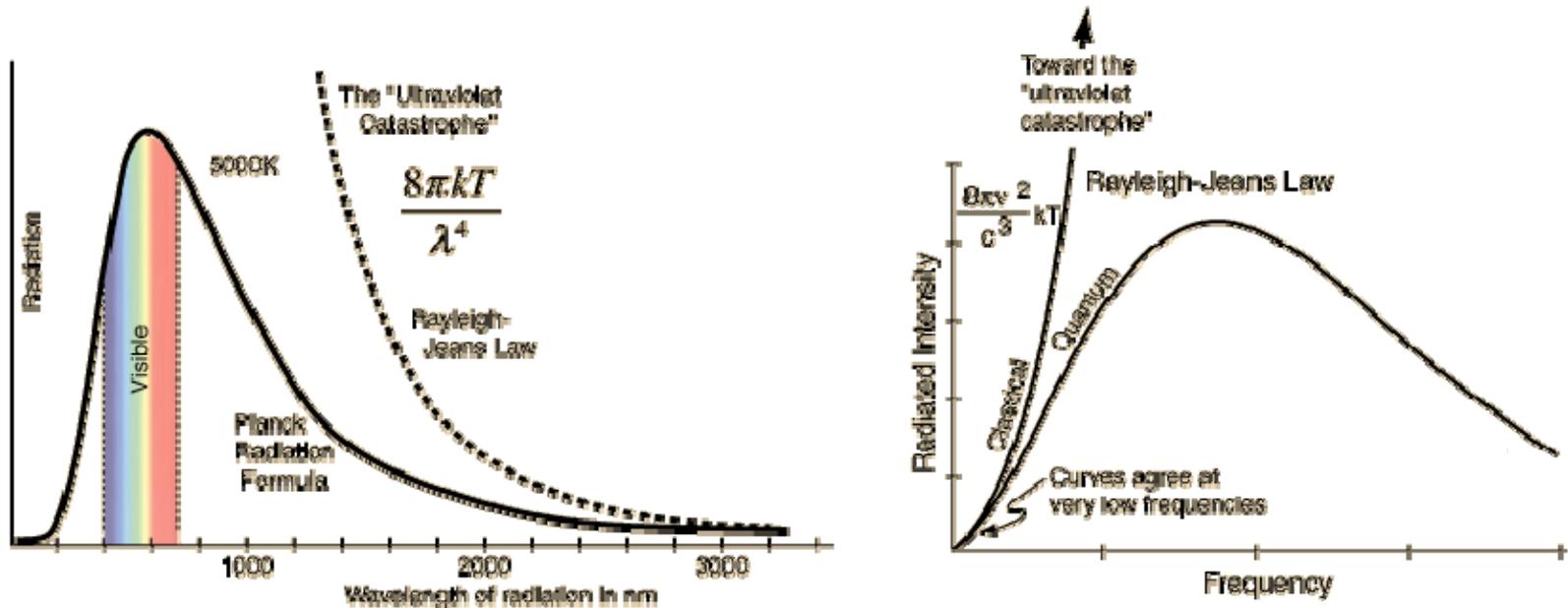
20

□ Ultraviolet catastrophe

□ Rayleigh-Jeans 법칙에 의한 자외선 파탄

- 파장 감소할 수록, 주파수 증가할 수록 복사에너지 강도가 급격히 증가: if $\lambda \rightarrow 0$, $\lim u(\lambda) \rightarrow \infty$

□ Only valid for large λ and small ν

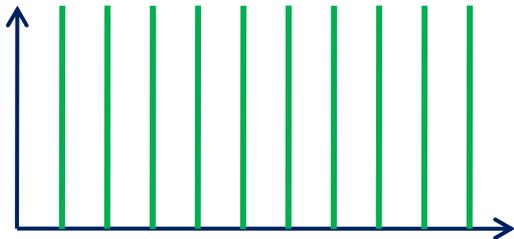


자외선 파탄 해석

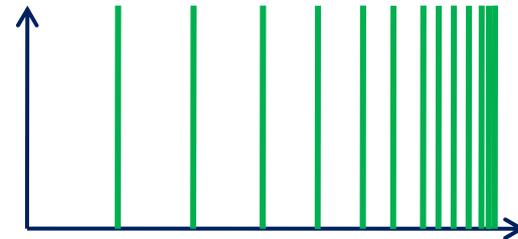
21

- R-J식에 어떤 문제점이 있는가
 - ▣ 상태밀도 계산은 정확
 - ▣ 볼츠만의 에너지 균등분배 원리가 CM에 기초
 - ▣ 식에 의하면 긴파장의 IR이상의 빛을 보면 타죽음
- 파의 밀집도를 반영 않은 에너지균등분배 원인
 - ▣ R-J식은 파가 밀집하지 않은 영역에서 적용가능

Single standing wave



Multiple standing wave



빈에 의한 R-J식 변형

22

- Wien's formula
 - 에너지 등분배가 아닌 밀집도 고려한 에너지분배
 - 낮은 파장, 높은 주파수 영역도 고려됨
 - “자외선 파탄” 억제

$$\frac{du}{d\lambda} = \left(\frac{8\pi}{\lambda^4} \right) (kT)$$

$$\frac{du}{d\nu} = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) (kT)$$

R-J

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} kT$$

$$\frac{du}{d\lambda} = \left(\frac{8\pi}{\lambda^4} \right) \left(\frac{k\beta c}{\lambda e^{\beta c/\lambda T}} \right)$$

$$\frac{du}{d\nu} = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) \left(\frac{k\beta\nu}{e^{\beta\nu/T}} \right)$$

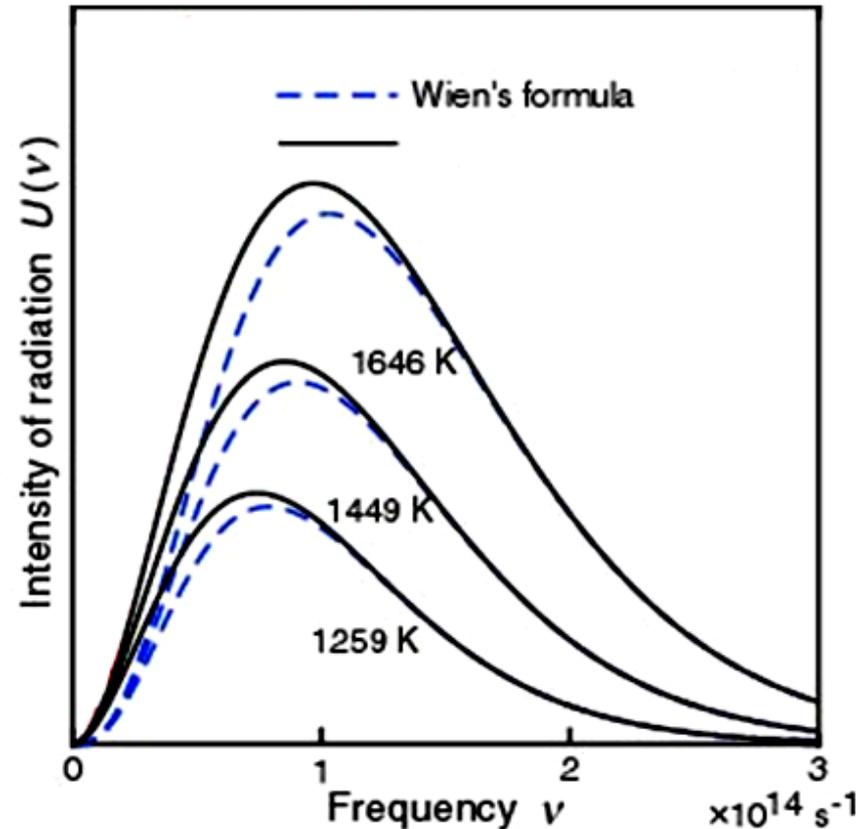
Wien

$$\langle E \rangle = \frac{k\beta\nu}{e^{\beta\nu/T}}$$

흑체복사에 대한 빈의 근사

23

- 적용범위
 - ▣ 실측치와 비교: 큰 ν 와 짧은 λ 에서 잘 맞음
 - ▣ 에너지 밀집 영역 반영
 - ▣ R-J식과 같이 CM기초
- Planck에 의한 개선
 - ▣ CM에서 출발
 - ▣ 결론은 QM로 귀결



플랑크에 의한 최종 해결

24

- Planck formula(식만 완성, 물리적이미 없었음)
 - ▣ 빈의 공식을 약간 변형(독립적인 연구수행 결과)

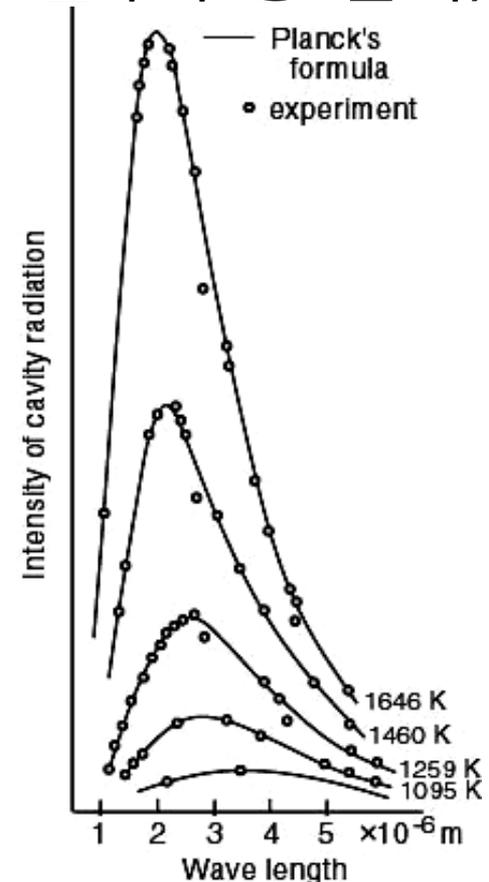
$$\langle E \rangle = \frac{k\beta\nu}{e^{\beta\nu}} \longrightarrow \langle E \rangle = \frac{k\beta\nu}{e^{\beta\nu} - 1}$$

- ▣ 흑체 단위부피당 에너지

$$U_\lambda = \frac{du}{d\lambda} = \left(\frac{8\pi}{\lambda^4} \right) \left(\frac{hc}{\lambda e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \right) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

$$U_\nu = \frac{du}{d\nu} = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) \left(\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$k\beta = h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$$



Planck to R-J & Wien

25

- If large $\nu \rightarrow$ Wien's formula

- $e^{h\nu/kT} - 1 \approx e^{h\nu/kT}$

$$\frac{du}{d\nu} = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) \left(\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \right) \approx \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) \left(\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}} \right)$$

- If small $\nu \rightarrow$ Rayleigh-Jeans formula

- Taylor expansion

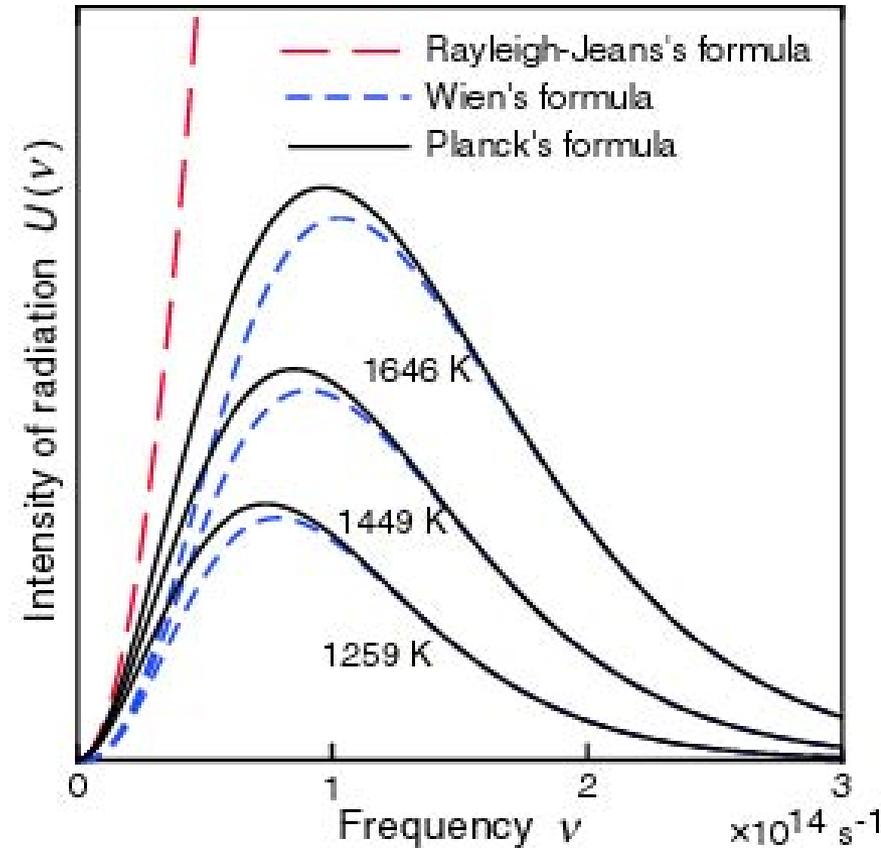
- $e^{h\nu/kT} - 1 \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} - 1 = \frac{h\nu}{kT}$

$$\frac{du}{d\nu} = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) \left(\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \right) \approx \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) \left(\frac{h\nu}{h\nu/kT} \right) = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) kT$$

3개의 흑체복사식 비교

26

- R-J formula
 - ▣ For small ν , large λ
 - ▣ $\langle E \rangle = kT$
- Wien formula
 - ▣ For large ν , small λ
 - ▣ $\langle E \rangle = hv / \exp(hv/kT)$
- Planck formula
 - ▣ For all ν and λ
 - ▣ $\langle E \rangle = hv / [\exp(hv/kT) - 1]$



왜 Planck식이 흑체복사를 모사하는가

27

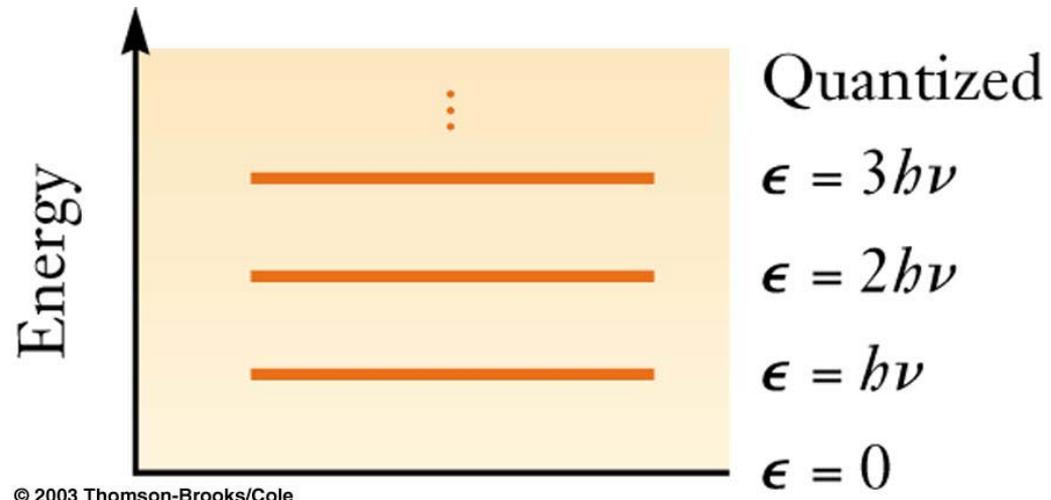
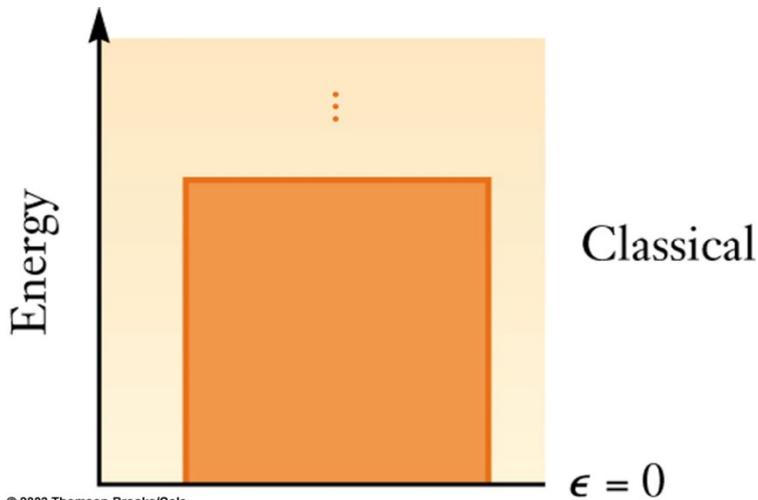
- Planck식은 물리적의미를 나중에 찾음
 - ▣ CM관점: E 는 (파동의 진폭)²에 비례, ν 영향 없다?
 - ▣ Planck의 관점: E 는 $\nu(=c/\lambda)$ 에 영향 받는다
- Planck's bold assumption
 - ▣ 에너지는 나눌 수 있는 단위인 양자(quantum)화 되어 있고, 빛의 에너지 양자는 광자(photon)이다
 - ▣ **Energy quantization concept: $E=nh\nu$**

에너지 양자 가설

28

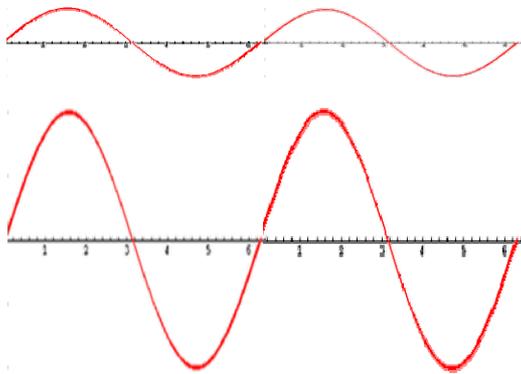
□ Energy quantum concept

- “빛이 가진 에너지는 이미 정해진 에너지 $h\nu$ 의 정수배인 “ $n h\nu$ ”라는 불연속에너지(에너지준위) 값이다”
- → CM에 위배되는 파격적인 사고

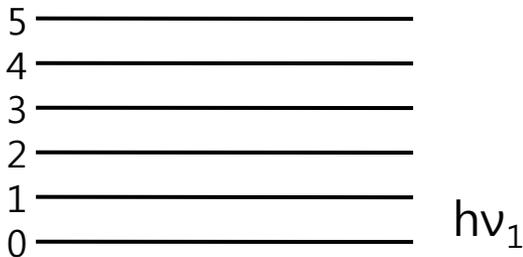


에너지 준위

- 복사에너지의 주요변수인
 - ▣ CM의 진폭은 QM에서 "n"값으로 대체



Small $E = hv_1$

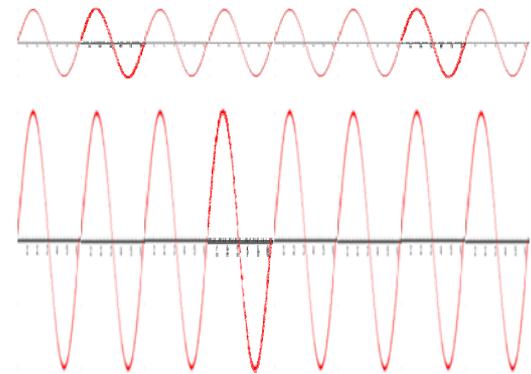


n=

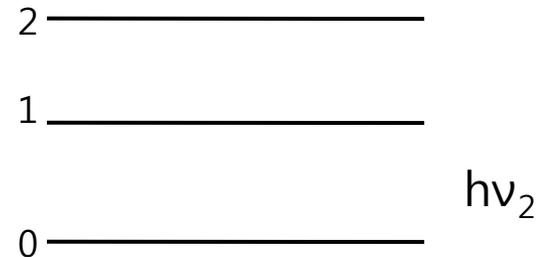
Small n

Large n

$$v_1 < v_2$$



Small $E = hv_2$

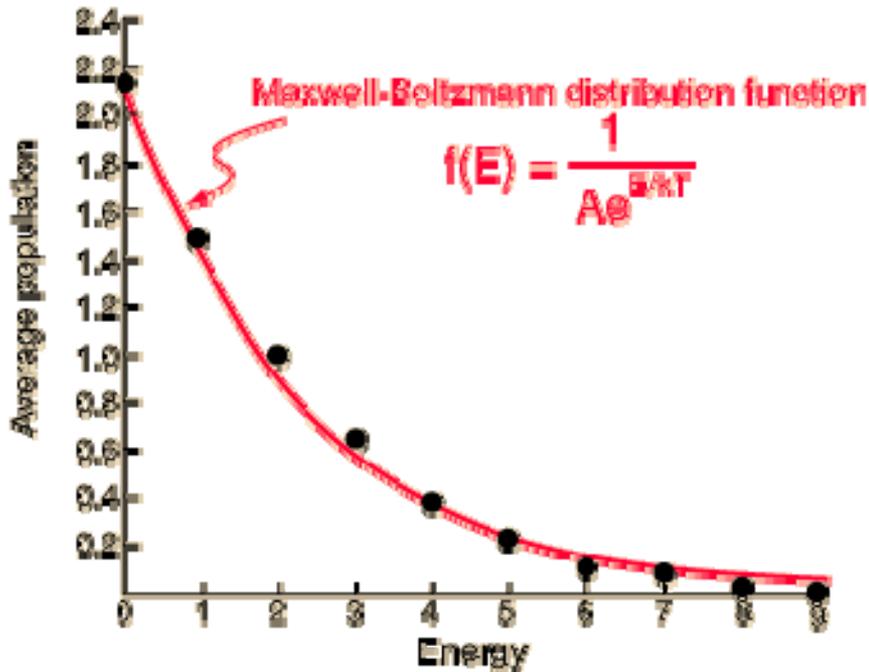


n=

통계역학적 해석

30

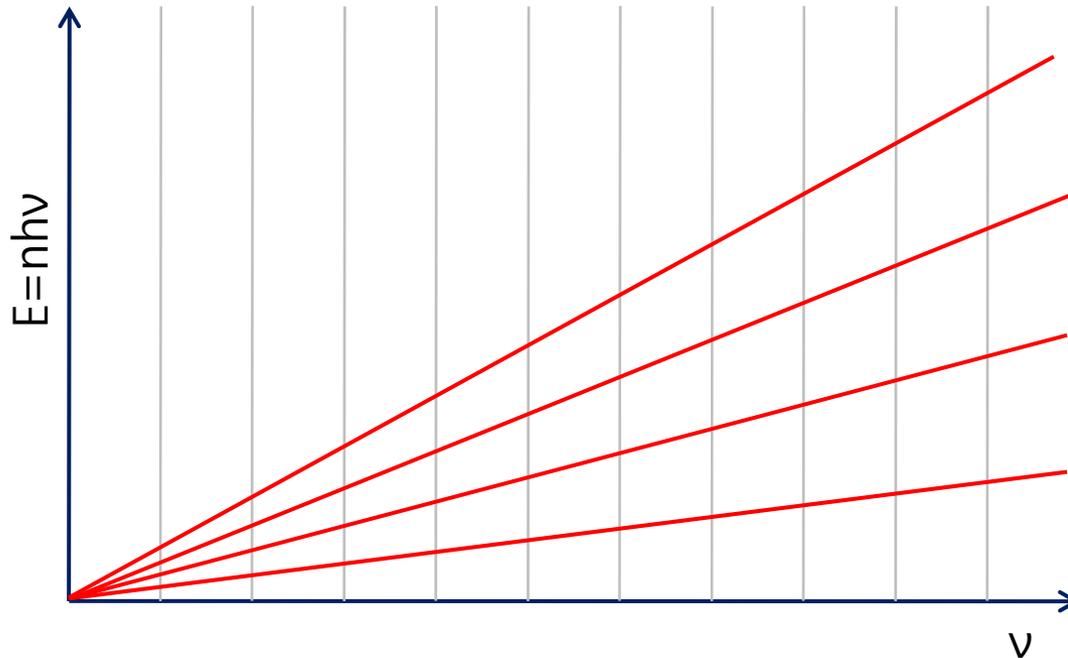
- 볼츠만 에너지 준위 발생횟수
 - ▣ 어떤 일정한 에너지 준위가 일정한 시간동안 발생한 횟수



왜 흑체복사는 최고점을 지니는가

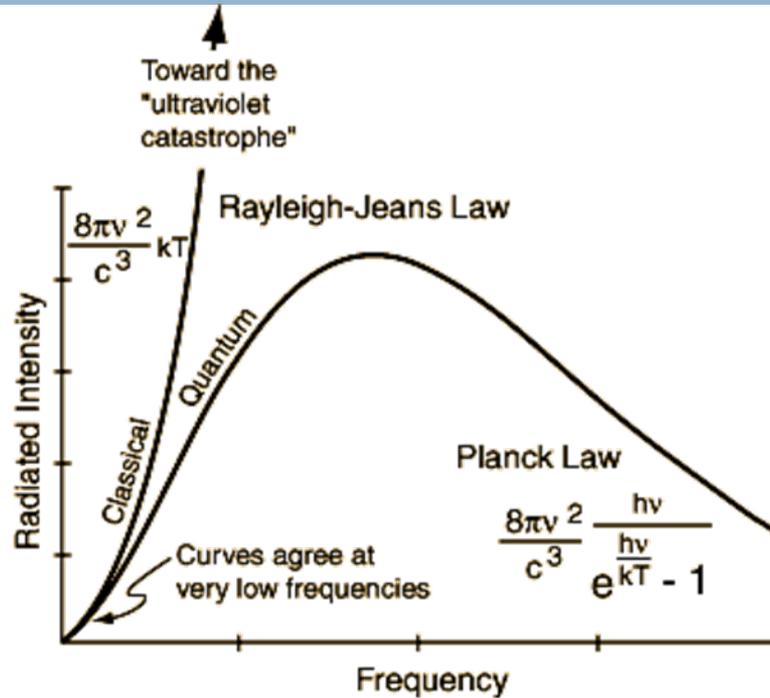
31

- ν 별 에너지 준위 ($E=n h \nu$)
 - 큰 ν , 작은 λ 에서는 광자 자체의 에너지 준위값이 크다 \rightarrow 외부에서 큰에너지에 영향 적음
 - \rightarrow 복사에너지 감소 \rightarrow 최대값 지님

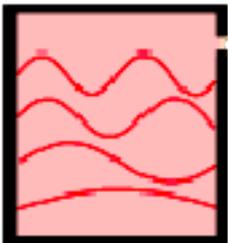


정리: CM과 QM에 의한 흑체복사 비교

32



Radiation modes in a hot cavity provide a test of quantum theory



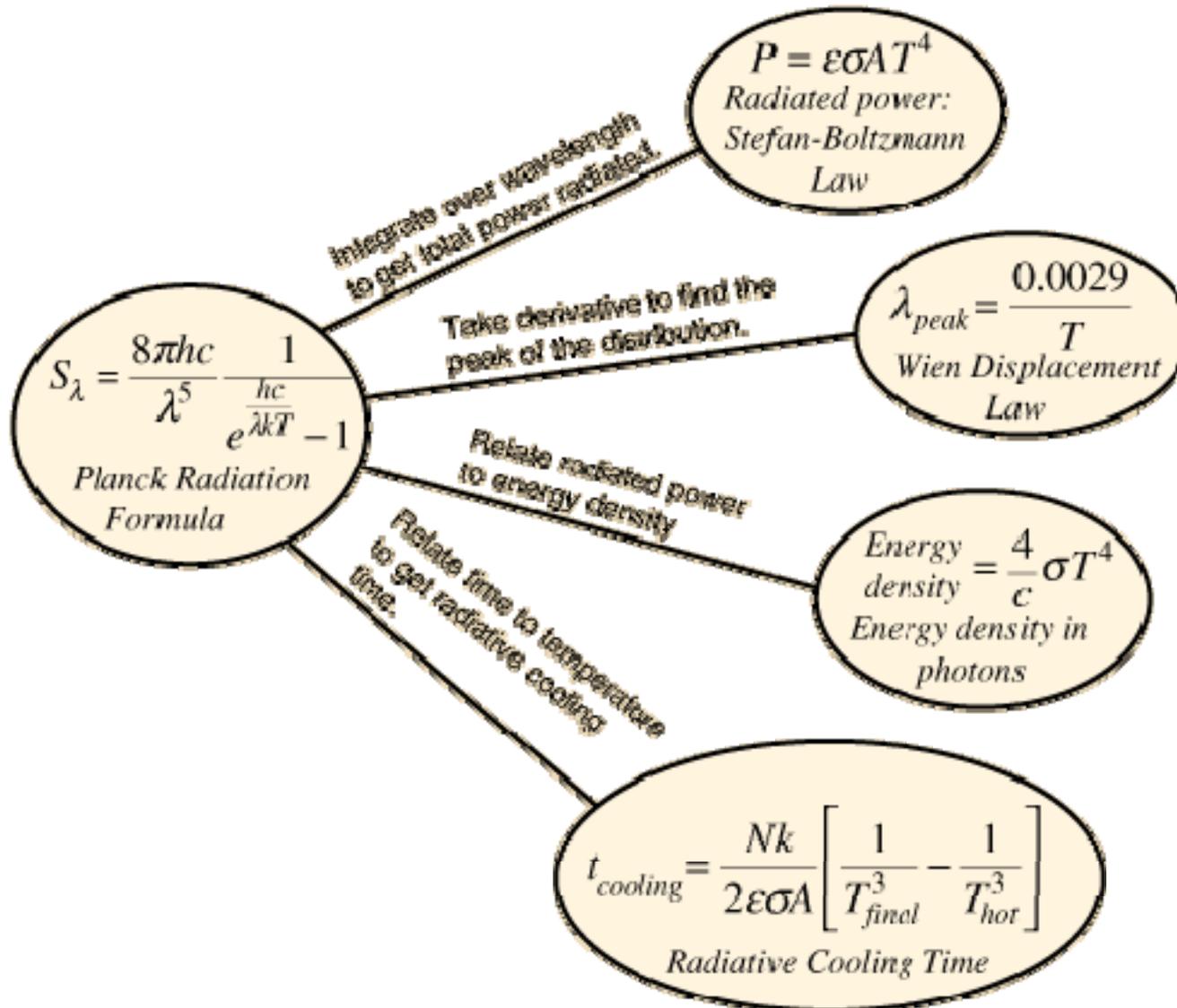
	#Modes per unit frequency per unit volume	Probability of occupying modes	Average energy per mode
CLASSICAL	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	Equal for all modes	kT
QUANTUM	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	Quantized modes: require $h\nu$ energy to excite upper modes, less probable	$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

연속적인 에너지

불연속적인 에너지

Planck 법칙의 사용분야

33



Planck식에서 Wien의 변위법칙 유도

34

- Planck formula의 파장에 대한 최대값 찾기

$$U_{\lambda} = \frac{du}{d\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} = 0$$

↓

$$-5(e^{hc/\lambda_{\max} kT} - 1) + \frac{h\nu}{\lambda_{\max} kT} e^{hc/\lambda_{\max} kT} = 0$$

↓

$$\lambda_{\max} k = 0.2898$$

