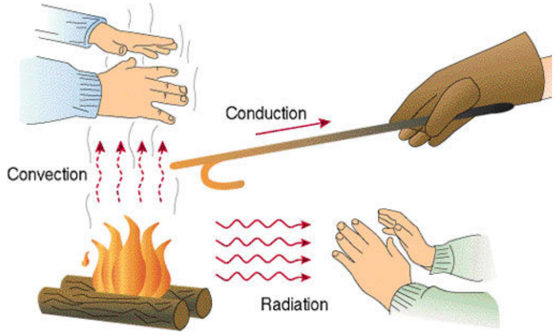
# 05 CM 실패-흑체복사

자신이 그 이론을 이해한다면,
그 이론을 대중들에게 이해시킬 수 있어야 한다.
- 리차드 파인만 -

## 고전물리학의 실패

고전물리학은 시대적으로 구분하면 19세기 말까지 발전되어온 물리학이라 하겠으나, 넓은 의미로는 일반적으로 변하지 않는 기본적인 진리를 담고 있는 물리학이라고 할 수 있다. 20세기 이전에는 뉴턴 역학, 맥스웰의 전자기학이면 모든 자연현상을 설명가능하리라고 생각하였었다. 20세기 들어서면서 상대성 이론과 양자론이 등장하여, 고전물리학의 오류를 수정할 수 있게 되었다. 과학사로 볼 때, 양자역학 관점에서 고전물리학의 오류를 처음으로 논하게 된 계기는 전자기파의 열복사(thermal radiation) 현상에 관한 설명이 어렵다는 것이었다. 양자론이라는 새로운 화두를 꺼내게 된 것은 플랑크(Planck)의 등장으로 시작되었다.

열이 전달되는 방식은 물체간의 직접 접촉에 의한 전도

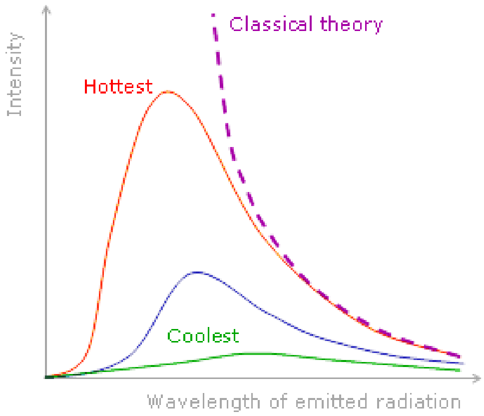



|열 전도, 대류, 복사|

(conduction), 공기를 매개로 한 대류(convection)와 같은 열진동이 있고, 열원에서 전자기파를 내보내 대상체가 이를 흡수하는 복사 방식이 있다. 열복사는 매개물질이 없는 진공에서도 가능하며, 지구가 태양으로부터 열에너지를 얻는 것도 열복사의 대표적인 예이다. 어두운 밤에도 별을 관찰할 수 있는 것은 별이 방출하는 가시광영역의 전자기파를 인식하는 것이다. 우리의 눈이 적외선이나 자외선까지 볼 수 있는 능력이 있다면 가시광이 존재하지 않는 밤에도 온도차에 의한 형상화를 할 수 있다는 것이다. 이것이 바로 적외선을 감지하는 야간투시경의 원리이기도 한다.

뜨겁게 달궈진 쇠가 붉게 빛나는 것도 가열된 물체에서 적색의 전자기파가 방출되기 때문이다. 즉 물체에서 방출되는 전자기파의 종류를 알면 대상체의 온도를 예측할 수 있게 된다. 붉은 빛은 비교적 저온이고, 물체가 고온이 됨에 따라 푸른빛을 띠게 된다. 즉 고온일수록 짧은 파장의 전자기파가 방출된다. 온도가 더 높아지면 가시광을 넘어서서 UV, x선도 방출된다. 그렇다면 거꾸로 열복사로 x선이 방출되는 물체를 바라보는 것이 인체에 아무런 영향을 안 줄 것인가라는 의문을 갖게 된다. 즉, 수십만K이상의 물체에서 방출되는 x선에 노출되는 순간 타 죽을지도 모른다는 것이다. 그러나 이러한 일은 실제로는 발생되지 않는다는 것을 고전물리학으로는 해석하기 어렵

다. 빛을 파동만으로 본다면 당연히 파장이 짧을수록 물체에서 방출되는 전자기파의 에너지 밀도는 높아지지만, 실제 관측결과에서는 파장감소에 따라 에너지 밀도가 계속 증가하는 것이 아닌 것으로 나타났다. 따라서 다행스럽게도 태양을 맨 눈으로 보더라도 우린 죽지 않으며, 밤하늘의 별빛도 아름답게 감상할 수 있는 것이다.



|열복사 파장에 따른 강도|

이러한 전자기파 복사 현상을 빛의 파동성으로 설명하지 못하듯이 이외에도 고체의 열용량(heat capacity), 광전효과(photoelectric effect), 수소의 휘선스펙트럼, 컴프턴 효과(Compton effect), 고체의 전자회절(electron diffraction)에 대해서도 파동설과 고전물리학으로 설명하기엔 오류가 많았다. 이에 에너지의 양자화(단위화)와 빛의 입자설을 이용하여 이러한 현상을 해석하게 되었다.

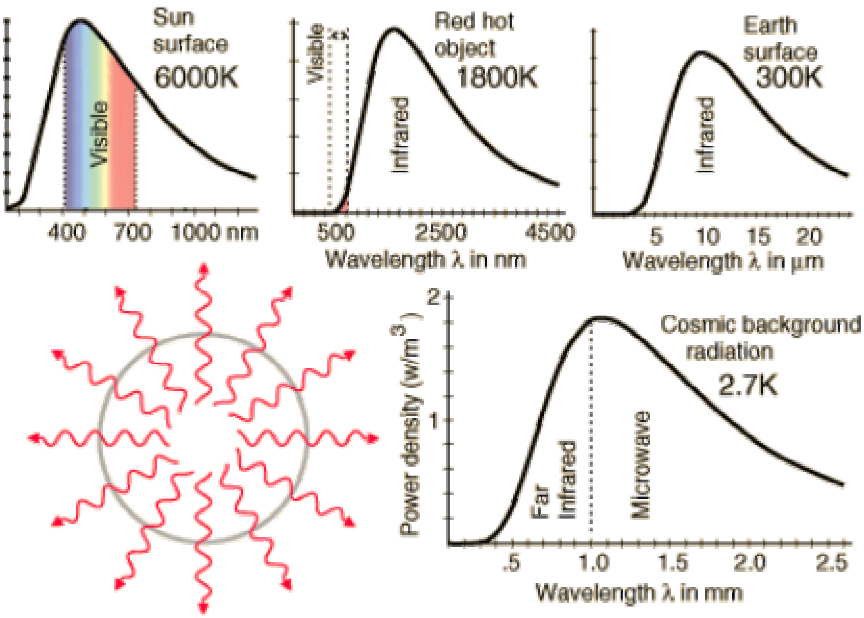
## ▌흑체복사

물체의 색깔을 구별할 수 있는 것은 물체의 색깔에 해당하는 파장만 반사하고 나머지는 흡수하기 때문이다. 만일 물체가 빛을 계속 흡수하기만 한다면 물체의 에너지가 올라가서 뜨거워질 것이다. 따라서

|반지에 사용된 Pt black|

동일한 온도를 유지하는 물체는 흡수한 빛만큼 복사파를 방출하게 된다. 흑체(black body)는 자신에게 입사되는 전자기파를 100% 흡수하고 반사율이 0인 가상의 물체이다. 달리 애기하면, 단위 면적당 주어진 온도에 대하여 파장이 낼 수 있는 최대 에너지를 방사하는 이상적인 방사체이다. 모든 빛을 흡수한다는 가정에서 검은 물체라는 뜻의 이름을 붙였으며, 흑체의 개념은 키르히호프가 처음 사용하였다. 실제로는 완전한 흑체는 존재하지 않지만 백금흑(Pt black)과 같이 흑체와 비슷한 물체는 많다.

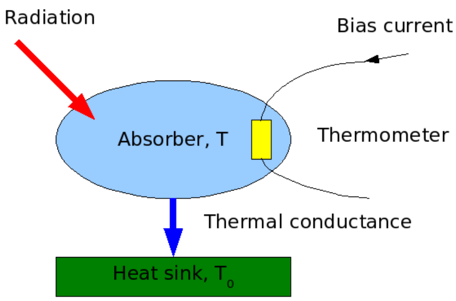
복사를 투과시키지 않는 벽으로 둘러싸인 물체를 일정한 온도로 유지시키고 외부에서 오는 열복사를 완전히 흡수하는 흑체와 같




|열복사 대상의 온도에 따른 다양한 복사파 형태|

은 상태를 만든 다음, 작은 구멍(cavity)을 만들어 두면 외부에서 흡수한 열복사에 의해 수많은 전자기파가 발생하게 된다. 이때 방출되는 복사선을 측정하면 복사체의 온도를 알 수 있게 된다. 흑체의 벽과 열평형 상태에 있는 전자기파의 상태를 흑체복사 또는 공동복사(cavity radiation)이라고 한다. 흑체에서 나오는 복사는 벽의 물질, 공동의 모양, 크기에 무관하고 오직 온도만의 함수가 된다. 이를 키리히호프 복사 법칙이라고 한다. 따라서 흑체는 고온용 온도계의 눈금보정이나 복사의 법칙을 증명하는 데 이용한다. 사실 흑체복사와 공동복사와는 동일한것이 아니지만 거의 유사한 것으로 본다. 공동복사는 속이 넓은 물체의 입구 부분을 아주 작게하여 일단 공동으로 들어간 빛은 다시 나올 가능성이 작아지게 되어 내부에서 빛이 모두 흡수된 것처럼 보이게 된다. 이때 흑체가 지닌 100% 흡수와 같은 현상이라고 하여 흑체복사와 동일하게 본다. 따라서 이 흑체를 가열하면 공동속에서 가열 온도에 따라 해당하는 전자기파가 빛으로 나오게 되고, 이때 프리즘을 이용한 색분리를 하면 해당온도를 예측할 수 있게 된다.

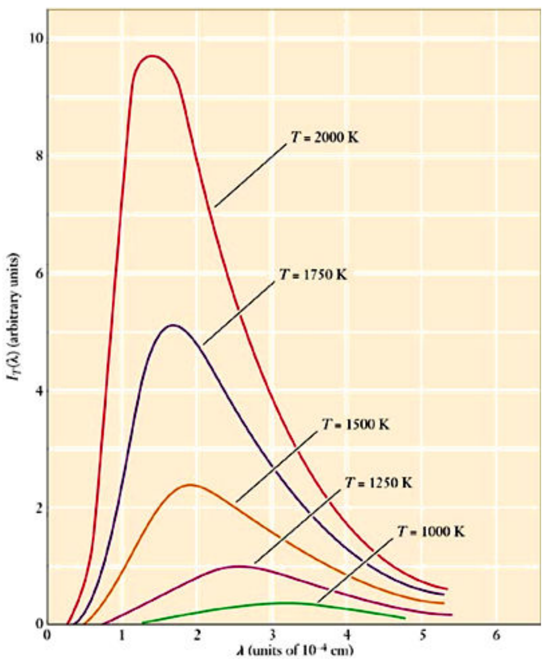
1886년 랭글리(Samuel Langley, 1834-1906)는 적외선의 강도를 잴 수 있는 볼로미터(bolometer)를 개발하여, 흑체 구리에서 발생하는 에너지와 태양에서 발생하는 에너지를 비교하는 실험을 통해 흑체 복사에 관한 정량적인 결과를 얻었다. 이 실험을 통해 적외선 영역의 정량적인 흑체복사 법칙을 발전시키는 데 기여하



|기본적인 볼로미터의 작동원리|

게 되었다. 볼로미터는 복사를 받으면 온도가 높아지고 전기저항이 변하는 성질의 금속이나 반도체를 검출체로 하여 복사선의 측정에 쓰이는 저항온도계라고 할 수 있다.

뜨겁게 달궈진 물체가 빛을 방출하는 것을 연소로 인한 것으로 생각할 수도 있으나 이는 연소가 일어나지 않는 물체(금속)을 달궜을 때도 동일한 현상이 나타나는 것으로 물체 자체가 발생하는 복사에너지임을 확인할 수 있다. 6000K이나 되는 태양의 표면에서는 적외선, 가시광선, 자외선 등 다양한 파장의 전자기파가 복사된다. 반면 뜨겁게 달궈진 물체는 주로 붉은색의 근적외선(near infrared)을 복사하기에 붉게 보인다. 지구 표면은 가시광선의 열복사가 없기에 단지 흡수된 가시광을 반사할 뿐 열복사는 적외선 영역에서만 발생한다. 즉 온도가 올라가면 스펙트럼은 강해지며, 피크 파장은 짧아진다. 물체에 따라서 스펙트럼의 분포 차이는 있지만 그 물체의 파장에 대한 흡수율과 비례하게 빛을 발산한다. 또한 모든 물체가 가지고 있는 스펙트럼은 흡수율 100%인 흑체가 스펙트럼을 상한선으로 한다. 우주배경복사를 측정하여 주로 원적외선(far infrared)과 전파(microwave)가 관찰되는 것으로 우주의 온도가 2.7K이

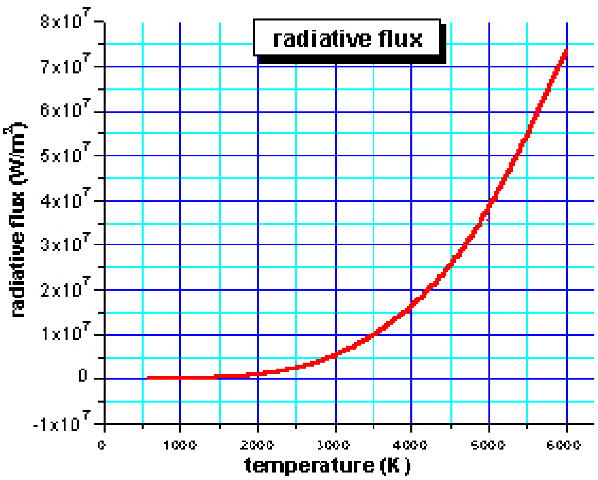



|온도에 따른 흑체복사파의 강도 변화|

라는 것을 알게 된다. 푸른 별은 7000K, 백색 별은 5300K, 붉은 별은 4000K 정도가 된다는 것도 흑체복사의 원리로 해석하였다.

흑체복사의 결과를 고전물리학으로 해석하면 3가지 법칙을 도출할 수 있다. 스테판(Josef Stefan, 1835-1893)-볼츠만(Ludwig Boltzmann, 1844-1906)의 법칙, 빈(Wihelm Wien, 1864-1928)의 변위법칙, 레일리-진(James Jeans, 1877-1946)의 법칙이다. 간략히 말하면, 스테판-볼츠만의 법칙은 복사되는 에너지가 온도의 4승에 비례한다는 것이고, 해당온도의 최대파장과 해당온도의 곱이 거의 일정하다는 것이 빈의 변위법칙이다. 레일리-진의 법칙으로는 상태필도와 파동의 에너지의 곱이 복사에너지임을 나타낸다.

## ▌ 스테판-볼츠만의 법칙



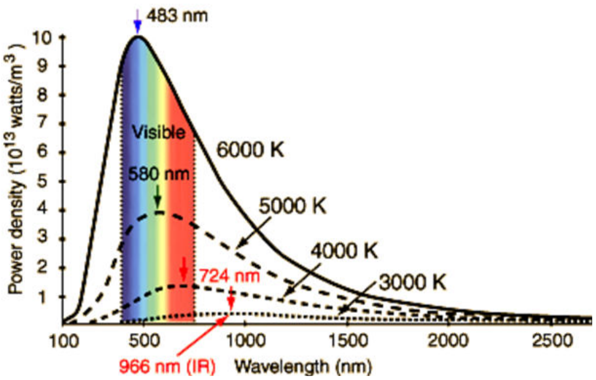

|스테판-볼츠만의 법칙에 따른 온도별 빛의 세기|

단위시간, 단위면적당 흑체가 복사하는 에너지는 절대온도 $T^4$에 비례한다는 스테판-볼츠만의 법칙은 스테판이 이론적으로 제안하고 볼츠만이 실험적으로 증명한 식이다. 즉, 적색이상(red hot object)의

온도를 지닌 흑체의 단위면적당 복사에너지는 $P/A=\varepsilon\sigma T^4$이고, 여기서 $\sigma$는 스테판-볼츠만 상수인 $5.6704\times10^{-8}$ $W/m^2K^4$이다. 흑체와 비흑체의 복사 세기의 비인 복사율($\varepsilon$)은 흑체와 같은 완전복사체는 1이 되지만, 대부분의 물질(gray body)은 $0<\varepsilon<1$의 값을 지닌다. 스테판은 그의 법칙을 이용하여 태양 표면의 온도를 결정하기도 하였다. 일반 주변온도($T_c$)로 복사시에는 복사에너지 손실이 생기고 이를 반영하여, P는 $\varepsilon\sigma(T^4-T_c^4)$로 표현된다.

## ▌빈의 변위법칙

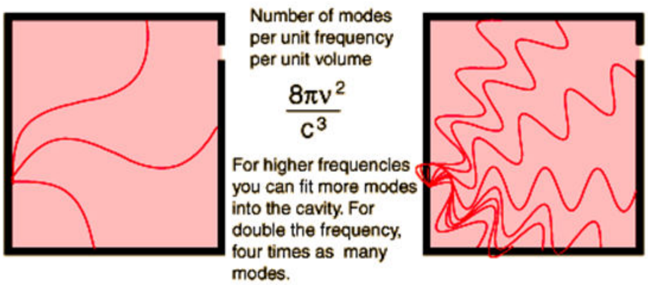
흑체복사에서 설명되는 빈의 변위(displacement)의 법칙은 해당온도의 최대파장($\lambda_{max}$)과 해당온도의 곱이 거의 일정하다는 것이다. 또는 최대파장은 그 흑체의 절대온도에 반비례한다. 즉 절대온도가 증가함에 따라 임의 물질에서 방사되는 에너지의 최대값이 더 짧은 파장 대역으로 이동한다는 것이다. 표면온도가 높은 태양의 복사 에너지 파장은 짧고 지구의 복사 에너지는 길다는 것이다. 이를 수식으로 나타내면, $\lambda_{max}T$는 상수가 되며, 그 값은




|빈의 변위법칙에 따른 해당온도별 최대파장|

$2.898 \times 10^{-3}$ mK이다. 고온의 별 온도 측정시 용이하다. 임의의 별이 483 nm에서 최대피크를 보인다면, 변위법칙을 이용하여 6000K 정도의 온도를 지닌다는 것을 예측할 수 있다.

## ▌상태밀도와 에너지균등 원리




**|공동내 정상파의 파장길이에 따른 상태밀도의 차이|**

흑체복사를 모사하기 도입한 동공복사는 실험값을 설명하기 위해 동공내 파동 개념을 도입하게 된다. 즉 짧은 파장일 수록 동공내 정상파(standing wave)가 다양하게 발생하고, 정상파의 발생빈도는 상태밀도($\rho$, density of state)로 나타내었다. 이때 상태밀도는 파장이 짧을수록, 진동수가 길수록 공간내 존재하는 파동수($n_s$, mode)는 증가하게 된다. 공간내 정상파의 모드 수는 3차원 파동방정식으로부터 유도할 수 있다.

3차원 파동방정식의 일반해를 통해 동공내 벽에서는 파동의 진폭이 0인 정상파만을 고려하려 모드값(n)을 구하면, $2L/\lambda$가 된다. 공동내 모드의 개수는 3차원 공간내에서 중심으로부터 거리를 n으로 보고, 3D중 양의 영역(1/8)과 전자기파의 직교성을 고려한 2배를 곱하

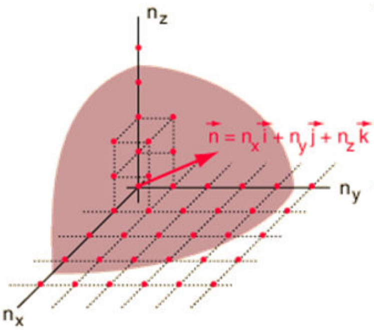
면 전체모드수(N)은 $8\pi L^3/3\lambda^3$이 된다. 이를 공동의 부피($L^3$)와 단위 파장으로 나누어 정의하면 상태밀도인 $\rho(\lambda)$인 $8\pi/\lambda^4$이 된다. 이를 진동수($\lambda$=c/$\nu$)로 바꾸면, $\rho(\nu)$로 표현되는 상태밀도는 $8\pi\nu^2/c^3$이 된다.

**상태밀도 계산**

3D wave function $$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

→ General solution $$E=E_0\sin\frac{n_1\pi x}{L}\sin\frac{n_2\pi y}{L}\sin\frac{n_3\pi z}{L}\sin\frac{2\pi ct}{\lambda}$$

→ Mode in cavity $$\left[\frac{n_1\pi}{L}\right]^2+\left[\frac{n_2\pi}{L}\right]^2+\left[\frac{n_3\pi}{L}\right]^2=\left[\frac{2\pi}{\lambda}\right]^2 \qquad n_1^2+n_2^2+n_3^2=\frac{4L^2}{\lambda^2}$$




→ Number of mode: positive volume

$$\text{"volume" of } n\text{'s}=\frac{4\pi}{3}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)^{3/2}$$

$$\text{Number of modes}=N=\frac{\pi}{3}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)^{3/2}=\frac{8\pi L^3}{3\lambda^3}$$

→ Number of mode per wavelength = density of state

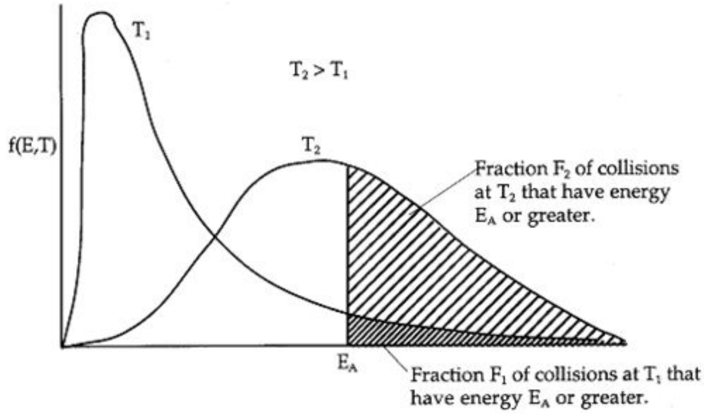
$$\frac{dN}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{8\pi L^3}{3\lambda^3}\right]=-\frac{8\pi L^3}{\lambda^4}$$

$$\frac{\text{Number of modes per unit wavelength}}{\text{Cavity volume}}=-\frac{1}{L^3}\frac{dN}{d\lambda}=\frac{8\pi}{\lambda^4}$$

상태밀도에 수반되는 또 다른 변수는 평균에너지이다. 즉 발생된 다양한 모드에 따른 개별 평균에너지가 고려되어야지 전체 복사에너지를 계산할 수 있게 된다. 평균에너지는 에너지 균등분배(equipartition of energy)를 이용하여 설명한다. 열적 평형상태에 있는 계에서 각각 독립된 에너지 상태에 평균적으로 동일한 양의 에너지가 부여되어 있다는 통계 물리학의 법칙이다. 이는 맥스웰과 볼츠

만의 연구에 기초를 둔 것으로, 절대온도에서 어떤 입자계가 평형 상태에 있으면 각 자유도에 대하여 1/2kT의 평균에너지를 갖는다는 것이다. 이는 자유도와 관련된 것으로 자유도가 증가할수록(모드수가 증가할수록) 갖는 평균에너지가 커진다고 할 수있다. 기체의 병진운동은 3차원 공간좌표를 갖기 때문에 3/2kT의 평균에너지를 지닌다. 여기서 k는 볼츠만 상수인 $1.381\times10^{-23}$ J/K이다. 단위 몰당으로 고려하면 아보가드로수 $N_A(6.02\times10^{23})$를 곱하면 $kN_A$가 기체상수 R(8.314 J/molK)이 되어, 1/2RT가 된다.

## 볼츠만 분포를 이용한 평균 에너지 계산




Probability at E → $f(E) = \frac{1}{kT} e^{-E/kT}$

Average energy → $< E > = \int Ef(E)dE = \frac{1}{kT}\int_0^\infty Ee^{-EkT}dE$

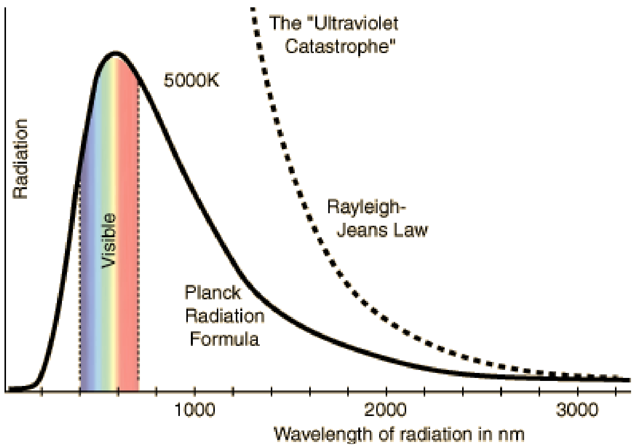
$$\frac{1}{kT}\int_0^\infty Ee^{-E/kT}dE = \underbrace{\frac{E}{kT}(kTe^{-E/kT})\Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{kT}\int_0^\infty kTe^{-E/kT}dE$$

$$\langle E\rangle = -kT\int_0^\infty e^{-E/kT}d\left(\frac{-E}{kT}\right) = -kTe^{-E/kT}\Big|_0^\infty = kT$$

맥스웰-볼츠만 분포법칙(distribution law)에 의하면, 특정 온도에서 기체분자의 다양한 분자속도에 대한 확률분포를 계산할 수 있고 이를 이용하여 해당 모드의 평균에너지(<E>)를 계산할 수 있다. 볼츠만의 에너지 균등분배원리에 바탕한 모드당 에너지는 kT가 된다. 이는 빛을 파동, 특히 정상파로 간주하고 계산한 상태밀도에 해당하는 평균에너지이다. 여기서 E의 전자기파로 추후에 플랑크상수를 고려한 $h\nu$가 된다.

## ▌ 레일리-진의 법칙

상태밀도와 평균에너지를 이용하여, 즉 철저히 고전물리학을 이용하여 흑체복사를 해석하면 공간상의 흑체복사에너지(spatial energy)는 모드가 존재할 상태밀도와 해당 모드가 지닐 평균에너지의 곱으로 표현된다. 이는 각각 파장과 진동수로 표현하면 다음식과 같이 된다. 이를 레일리-진의 법칙이라고 한다. 복사




**|레일리-진의 법칙에 의한 UV 파탄현상|**

파장이 감소할수록 또는 진동수가 증가할수록 에너지의 강도가 증가함을 알 수 있다. 그렇다면

$$E(\lambda) = \frac{dU}{d\lambda} = \rho(\lambda) < E >= \frac{dn_s}{d\lambda} < E >= \frac{8\pi}{\lambda^4} kT$$

$$E(\nu) = \frac{dU}{d\nu} = \rho(\nu) < E >= \frac{dn_s}{d\nu} < E >= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

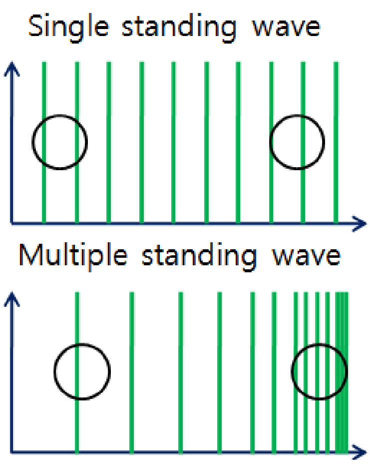
**|레일리-진의 법칙|**

파장이 극히 작아지면, 즉 진동수가 커진다면 해당 물체에서 나오는 열복사를 감당하지 못하여 태양조차도 바라보지 못하게 된다. 즉 자외선 파탄(UV catastrophe) 현상이 나타난다.

## ▌ 자외선 파탄현상

레일리-진에 의한 열복사에너지 해석은 단지 작은 주파수 영역과 긴 파장대에서만 적용 가능한 법칙이 된다. 파장이 더 짧아지거나 주파수가 커진다면 레일리-진에 의한 열복사에너지는 무한히 증가하는 수학적 발산이 일어난다. 이러한 판탄현상을 고전물리학적 접근의 한계로 설명할 수 있다.

상태밀도 해석은 어느정도 정확했다고 볼 수 있으나, 볼츠만의 에너지 균등분배 원리에 의한 평균에너지 해석 자체에 문제점이 있었다. 즉 고전




**|파동의 밀집도에 따른 에너지의 밀집도 차이|**

물리학에서는 진동수에 따라서 파의 밀집도가 다르다는 점을 간과하였다. 파장이 짧고 주파수가 큰 영역은 동일한 공간상에서 밀집도가 높고 에너지가 클수밖에 없다. 레일리-진 식은 파장의 분포가 넓은 큰 파장영역에서 잘 맞는 이유도 밀집도가 에너지 균등분배에 영향을 안주는 영역이었기 때문에 잘 맞았던 것이고, 파장이 밀집된 고에너지 영역에서는 당연히 잘 맞지 않게 된다. 따라서 수정된 평균에너지는 균등분배가 아닌 밀집정도가 고려된 값이 되고, 이는 에너지분포와 유사하게 지수함수($e^{-f(T)}$)에 의존하게 된다. 이를 통해 자외선 파탄현상 억제되고, 전 파장영역에서 복사에너지가 잘 맞게 된다.

## ▌빈의 해석

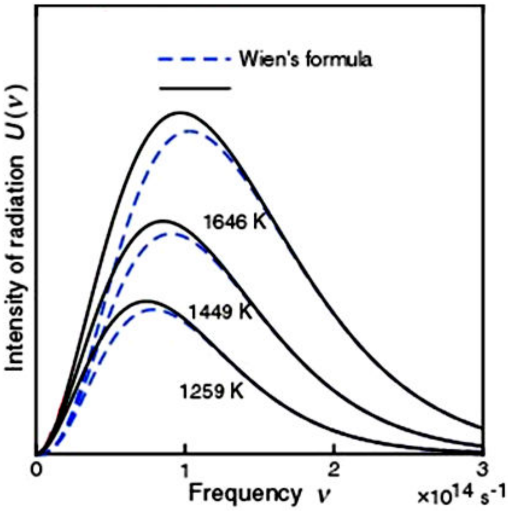
자외선 파탄현상을 억제한 것은 빈에 의한 것이었다. 빈의 식(Wien's formula)은 기존의 상태밀도에 수정된 평균에너지를 곱한 값으로, 낮은 파장, 높은 주파수 영역도 고려된 결과로 흑체의 열복사 결과를 어느정도 근사시켰다고 볼 수 있다. 평균에너지를 고려한 복사에너지는 다음과 같이 수정된다.

$$\langle E \rangle = \frac{k\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}}, \quad \frac{du}{d\lambda} = \left(\frac{8\pi}{\lambda^4}\right)\left(\frac{k\beta c}{\lambda e^{\frac{\beta c}{\lambda T}}}\right), \quad \frac{du}{d\nu} = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\right)\left(\frac{k\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}}\right)$$

**|수정된 평균에너지에 따른 빈의 공식|**

이 식에서 $\beta$는 빈의 상수이며, 볼츠만 상수를 곱한 $k\beta$는 추후 플랑크 상수(h) 값인 $6.63\times10^{-34}$ Js가 된다. 실측치와 비교해 보

면, 레일리-진의 법칙에 비하여 큰 주파수와 짧은 파장에서도 상당히 잘 맞고 있다. 그러나 약간의 오차를 가지고 있음을 알 수 있다. 파동의 밀집도를 고려한 수정된 평균에너지를 사용하였다고 하더라도, 이 또한 고전물리학의 한계를 넘지는 못했다는 증거가 되어 버렸다. 이를 해결한 사람이 바로 플랑크이다.




|빈의 공식을 이용한 복사에너지 근사|

## ▌ 플랑크의 해석

플랑크는 사실 양자론의 시발점에 있어서 가장 중요한 인물이긴 하지만 전적으로 고전물리학에 갇혀 있었던 인물로 자신이 발견한 양자화된 에너지 상태를 믿고 싶어하지 않았다. 플랑크는 실험값으로 얻은 흑체 복사에너지를 단순히 데이터 회귀분석(regression analysis)를 통해 관계식을 도출하였다. 독립적인 연구이긴 하였으나, 결과적으로는 빈의 공식에 약간의 변형을 거친 형태인 평균에너지의 분포항에 -1을 추가한 형태가 되었다. 실험치와 당연히 완벽하게 일치하는 공식을

유도해 냈지만 초반에는 어떠한 물리적인 의미도 갖지 않았었다.

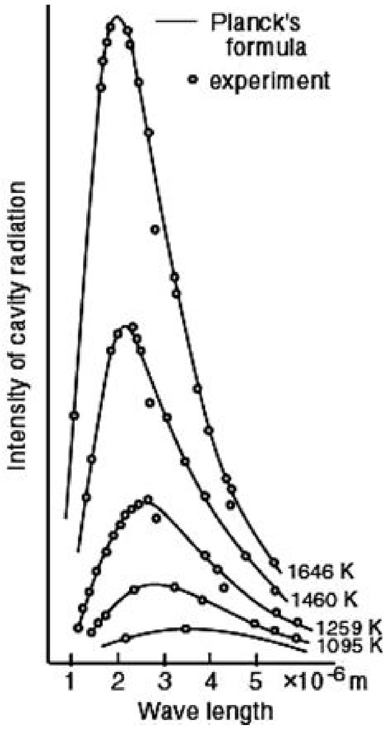
$$\langle E\rangle = \frac{k\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}} \longrightarrow \langle E\rangle = \frac{k\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}-1}$$

$$U_\lambda = \frac{du}{d\lambda} = \left(\frac{8\pi}{\lambda^4}\right)\left(\frac{hc}{\lambda e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\right) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

$$U_\nu = \frac{du}{d\nu} = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\right)\left(\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\right) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$$

**|플랑크의 흑체복사 식|**

단순히 수학적으로만 본다면, 플랑크의 수식은 아주 큰 파장과 아주 작은 파장별로 접근 시키면 모두 레일리-진의 식과 빈의 식으로 수렴한다. 즉, 작은 파장에서는 플랑크 식내 지수함수가 빈의 공식에 있는 분모와 동일하게 변형된다. 또한 큰 파장에서는 주파수가 커져서 플랑크 식의 분모는 테일러(Brook Taylor, 1685-1731) 급수(series) 전개를 하게 되고 분모항에서 지수가 사라지게 되어 결국 레일리-진의 식으로 변형된다. 따라서 플랑크의 복사에너지 관계식이 전 영역의 파장에 관하여 모두 설명 가능한 식이 된다. 또한 플랑크 식의 최대값(dU/dλ=0)을 구하면, 빈의 변위의 법칙을 설명하는 식($\lambda_{max}$T=0.0029 mK)이 유도된다.




**|플랑크의 곡선 회귀|**

**플랑크 식의 변형**

If large ν → Wien's formula

- $e^{h\nu/kT} - 1 \approx e^{h\nu/kT}$ $\quad \dfrac{du}{d\nu} = \left(\dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}\right)\left(\dfrac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}\right) \approx \left(\dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}\right)\left(\dfrac{h\nu}{e^{h\nu/kT}}\right)$

If small ν → Rayleigh-Jeans formula

- $e^{h\nu/kT} - 1 \approx 1 + \dfrac{h\nu}{kT} - 1 = \dfrac{h\nu}{kT}$

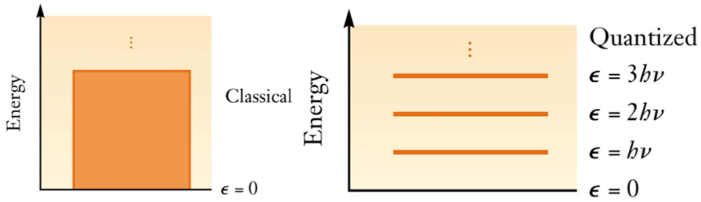
$$\frac{du}{d\nu} = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\right)\left(\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}\right) \approx \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\right)\left(\frac{h\nu}{h\nu/kT}\right) = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\right)kT$$

이러한 훌륭한 관계식이 아무런 물리적 의미를 제시하지 못한다는 것에 실망한 플랑크는 며칠에 걸쳐서 수식의 의미를 찾고자 노력하였다. 이에 플랑크는 과감한 발상의 전환을 하게 되고, 자신이 믿고 있던 고전물리학의 개념에 위배되는 에너지의 양자화를 선언한다. 즉 고전물리학 관점에서 보면 에너지는 연속적이며 프리즘을 통과한 무지개 또한 연속적이지만, 에너지를 불연속이고 나눌 수 있는 기본 단위체인 양자(quantum)으로 보자는 것이었다.

## 에너지 양자 가설

플랑크는 연속적인 에너지를 가래떡을 토막내듯이 일정한 크기로 잘라서 단편화시킨 에너지 양자가설(quantum hypothesis)를 제안한다. 물질에 의한 열복사의 방출 또는 흡수는 연속적으로 일어나는 것이

아니라 단위 에너지, 즉 이미 정해진 불연속 에너지(hν)의 정수배로 일어난



**|연속과 불연속(양자화) 에너지 분포|**

다는 것이다. 이는 고전물리학을 정면으로 대치하는 가설로 플랑크는 그의 열복사 공식을 만족시키기 위해 무리한 가정을 제안하게 된 것이다. 이 첫 번째 가정은 진동자(전자 등)의 에너지는 특정의 불연속 값(E=nhν)을 갖는다는 것으로, 각 진동자는 식에 의해 불연속 값만을 가지므로 에너지가 양자화 되었음을 의미한다. 두 번째 가정은 진동자는 한 상태에서 다른 상태로 천이할 때만 에너지를 흡수하거나 방출하며, 이때도 흡수/방출되는 에너지는 양자화된 hν이다. 따라서 플랑크 이론의 중심의 에너지 상태의 양자화(quantization)이다. 이는 추후 아인슈타인의 광양자설과 보어(Niels Bohr, 1885-1962)의 원자모형의 기본원리가 된다. 이처럼 사실 양자역학은 가설을 바탕으로 시작된 학문으로 가설을 실험으로 증명하고, 실험적인 현상을 가설로 제안하는 과정에서 번창한 학문이다.

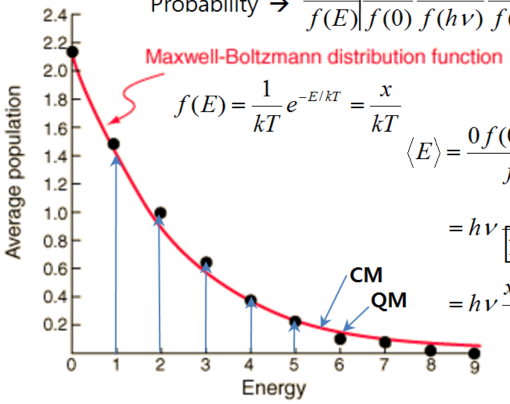
고전물리학에 의하면 에너지는 파동의 진폭(A2)에 비례하고 파장이 짧을수록 그 에너지가 크다고 생각하였다. 플랑크의 가설에서는 복사에너지의 크기를 나타내는 변수는 진폭에서 n과 ν로 대체된다. 그는 불연속적인 에너지 준위라는 개념을 통계역학적 해석과 접목하여 그가 구한 공식이 맞는지 증명하고자 하였다. 어떤 일정한 에너지 준위(불연속)가 일정한 시간동안 발생한 횟수를 맥스웰-볼츠만 분포식으로 계산하였을 때, 놀랍게도 플랑크의 열복사식이 최종식으

로 나왔다. 그 바탕에는 에너지는 nhν로 양자화되어 있다는 것이었다. 이로서 플랑크의 에너지 양자화 개념은 흑체복사에 있어서 반드시 필요한 개념이 되었으며, 양자역학의 서문을 연 계기가 되었다.

## 플랑크 양자설의 통계역학적 해석

Probability →

| $E$ | $0$ | $h\nu$ | $2h\nu$ | $3h\nu$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(E)$ | $f(0)$ | $f(h\nu)$ | $f(2h\nu)$ | $f(3h\nu)$ |




$$f(E)=\frac{1}{kT}e^{-E/kT}=\frac{x}{kT}$$

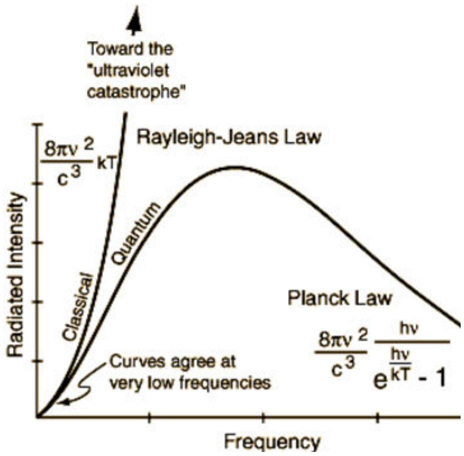
$$\langle E\rangle=\frac{0f(0)+h\nu f(h\nu)+2h\nu f(2h\nu)+\ldots}{f(0)+f(h\nu)+f(2h\nu)+\ldots}$$

$$=h\nu\frac{\left[e^{-E/kT}+2e^{-2E/kT}+\ldots\right]}{\left[1+e^{-E/kT}+e^{-2E/kT}+\ldots\right]}=h\nu\frac{(x+2x^2+\ldots)}{(1+x+x^2+\ldots)}$$

$$=h\nu\frac{x/(1-x)^2}{1/(1-x)}=\frac{h\nu}{1/x-1}=\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}$$

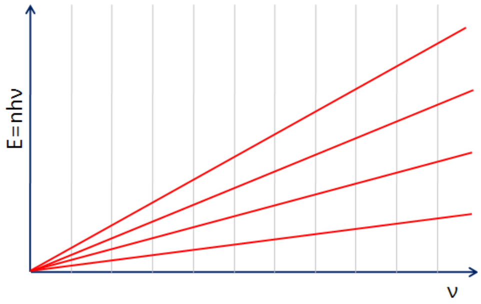
## 최대점을 갖는 흑체복사

흑체복사의 실험값과 플랑크의 복사에너지 식을 도식화하면 모두 특정 파장에서 최대값을 갖는 곡선형태를 지닌다. 이러한 이유는 큰 진동수, 작은 파장은 그반대의 영역에 비해 넓은 에너지




|흑체복사에 관한 CM과 QM 비교|

준위값을 지니고 되고, 외부의 에너지 공급에 의한 영향이 작게 된다. 따라서 파장이 점점 감소할수록(진동수가 증가할수록) 고에너지쪽으로 이동하며, 외부의 영향이 감소하게 되고 결과적으로 파장에 따른 복사에너지가 감소하게 된다. 이러한 이유로 최대점을 지닌 형태가 된다.




**|주파수에 따른 분배된 에너지준위 크기|**

## ▌등장인물 살펴보기

**사무엘 랭글리(Samuel Langley, 1834-1906)**
미국의 천문학자, 물리학자, 발명가이다. 그는 태양 물리학에 저명하며, 열복사를 해석하기 위해 볼로미터를 발명하였다. 그의 업적인 적외선 측정법을 이용하여 온실효과를 계산하는 방법을 제공하기도 하였다. 또한 비행술에 관한 개척자이기도 하다.

**요제프 슈테판(Josef Stefan, 1835-1893)**
오스트리아 물리학자이다. 열을 방출하는 물체의 복사파와 온도의 관계를 관찰하여, 그의 제자인 볼츠만과 함께 슈테판-볼츠만의 법칙을 발견한다. 그는 전자기유도, 열자화효과, 광학간섭, 열전도도, 확산, 모세관현상, 기체 운동학 등 다양한 영역에서 업적을 남겼다.

**루트비히 볼츠만(Ludwig Boltzmann, 1844-1906)**
오스트리아의 물리학자이다. 통계역학과 통계열역학으로 유명하며, 빈 대학에서 슈테판의 지도로 기체운동론에 관한 박사를 받았다. 그의 제자로는 아레니우스(Arrhenius)와 열역학 3법칙을 주장한 네른스튼(Nernst)가 있었다. 슈테판이 관찰한 현상을 통계열역학으로 해석하였다.

**빌헬름 빈(Wilhelm Wien, 1864-1928)**
독일의 물리학자이다. 열과 전자기에 관한 이론을 이용하여 빈의 변위의 법칙을 만들었고, 열복사에 관한 업적으로 1911년 노벨 물리학상을 받았다. 그는 헬름홀츠(Helmholtz)로부터 박사를 받았다. 또한 질량분광기(mass spectroscopy)의 기초를 만들었다.

**제임스 진(James Jeans, 1877-1946)**
영국의 수학자, 물리학자, 천문학자이다. 양자역학에 기여를 하였으며, 복사이론과 별의 진화에 관한 이론을 펼쳤다. 그는 영국 우주학의 창시자로, 우주배경복사에 관한 해석과 빅뱅이론의 근본이 되는 평형우주론을 제안하였다. 또한 물리학과 철학의 만남에 관심을 가졌다.

**브룩 테일러(Brook Taylor, 1685-1731)**
영국의 수학자이다. 미적분학에서 미분가능한 어떤 함수를 다항식의 형태로 근사하는 방법인 테일러 급수 전개를 제안한 것으로 유명하다. 그러나 그가 처음 발견한 것은 아니며, 테일러 급수의 특별한 경우인 매클로린(Maclaurin) 전개도 있다.

**닐스 보어(Niels Bohr, 1885-1962)**
덴마크의 물리학자이다. 20세기 가장 중요한 과학자 가운데 한사람으로, 양자론을 원자구조와 분자구조 해석에 최초로 적용했다. 양자물리학을 이끌어온 인물로서 주요한 공헌을 하였으며, 1922년 노벨 물리학상을 받았다. 맨해튼 프로젝트에도 참가했었다.