

17

QM의 정리

인간이 겪을 수 있는 경험 중 가장 아름다운 것은 신비이다.
신비는 예술과 과학의 근본을 이루는 진정한 모태이다.
이 사실을 깨닫지 못하고 확실한 길만을 추구하는 과학자는
결코 우주를 맑은 눈으로 바라볼 수 없다.
- 알베르트 아인슈타인 -

■ 디랙의 QM 정리

심상이 없다고 여긴 하이젠베르크의 행렬역학에 반하여 심상을 위한 슈뢰딩거의 파동역학은 사실상 서로 대응(일치)한다는 것을 디랙(Paul Dirac, 1902-1984)에 의해 밝혀진다. 연산자들로 구성된 디랙의 변환 원리에 의해 수학적으로 두식이 일치함을 발견한다. 이에 디랙은 맥스웰의 전자기학과 아인슈타인의 상대성이론, 슈뢰딩거의 파동역학을 반영한 현대 양자역학을 집대성하게 된다. 이 과정에서 그는 반물질(anti-matter)의 개념을 도입하고, 실제 존재할 수 있음을 예견한다. 음전하를 띤 전자와 쌍을 이루는 양전하를 갖는 양전자의 존재를 예측한 것이다.

디랙이 보기에 슈뢰딩거 식은 파동의 성질을 잘 표현하다 보니, 빛의 속도에 가까운 운동을 하는 입자의 성질을 표현하는 데에는

조금 미약하
 다고 보았다.
 특수 상대성
 이론을 접목
 시켜 광자가
 아닌 전자에

하이젠베르크 슈뢰딩거

$$H(P,Q)\Theta = W\Theta \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = E\Psi$$

$$\left(H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{k}{2}Q^2\right)\Theta = W\Theta \quad \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{2\pi i}\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{k}{2}x^2\right)\Psi = E\Psi$$

디랙의 변환원리에 의한 행렬역학과 파동역학의 대응

관하여 해석을 시도하다 보니, 대상체의 상대속도를 고려한 에너지 항을 적용하게 되었다. 즉, 고전물리학에서 $E=mv^2/2=p^2/2m$ 이었던 것을, $E^2=m^2c^4+p^2c^2$ 와 같은 상대적인 에너지 항을 도입하였다. 즉 상대론적 양자역학을 만든 것이다.

디랙 방정식에 따른 해

$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$

this is a 4-dimensional derivative:
space and time get same treatment

$E = \pm\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$

$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

Energy ↑

$+E'$

$+m_e$

0

$-m_e$

$-E$

$s = -1/2$ | $s = +1/2$

Particle

$+m$ Spin-up $+1/2$

$\psi^{(1)} = \psi_{E=+mc^2, +\hbar/2} = \frac{1}{\sqrt{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2 t/\hbar}$ Spin-down $-1/2$

$\psi^{(2)} = \psi_{E=+mc^2, -\hbar/2} = \frac{1}{\sqrt{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2 t/\hbar}$

Anti-Particle

$-m$

$\psi^{(3)} = \psi_{E=-mc^2, +\hbar/2} = \frac{1}{\sqrt{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imc^2 t/\hbar}$ Spin-down $-1/2$

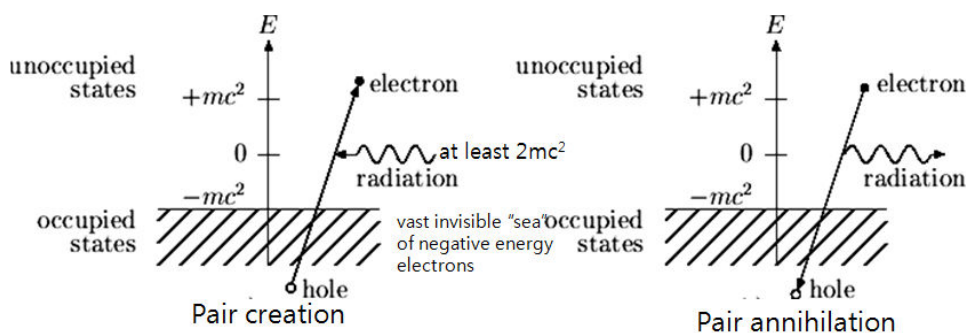
$\psi^{(4)} = \psi_{E=-mc^2, -\hbar/2} = \frac{1}{\sqrt{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imc^2 t/\hbar}$

그는 또한 전자(입자)는 본래부터(ab initio) 1/2 스핀을 지니

고 있다 사실을 방정식 유도에 도입하였다. 초반에는 입자의 상태가 하나의 파동함수로 기술되었지만, 나중에 스핀이 밝혀지면서 하나의 파동함수로 입자의 상태를 제대로 표현하기 힘들었다. 이에 함수에 행렬을 하나 더 곱해서 상태를 완전하게 기술하게 된다. 스핀 이전에는 스칼라(scalar) 함수였다면, 스핀이라는 하나의 벡터량이 도입되면서 벡터(vector) 함수가 도입되어야 했다. 디랙은 상대론적 관점에서 슈뢰딩거의 방정식을 변형하던 과정에서 파동함수는 적어도 4차원 이상의 열행렬이 아니면 안 된다는 사실을 이끌어 낸다. 디랙 방정식에서 4개의 파동함수가 해로 제시되었고, 이중에 두 개는 가상의 질량이 없는 입자들의 값으로 도출되었다. 일반적인 개념으로는 허근으로 보고 무시할 것을 테지만, 디랙은 빈공간도 유행과 같은 존재인 반물질로 가득 채워져 있다고 설명하였다.

■ 물질-반물질

디랙 방정식을 통해 도출된 4개의 해는 물질과 반물질의 함수이며, 파동방정식을 선형화시켰다는데 의미가 있다. 진공자체를 음의 에너지로 가득 찬 상태라고 하였다. 투명 아크릴로 만든 상자를 진공으로 만들더라도 그 내부가 하나의 공간으로 유지되는 것이 바로 반물질이 가득 채우고 있기 때문이라고 볼 수 있다. 반입자는 입자와 반대되는 전하를 지니고 있다고 보았기 때문에 전자가 빠져나간 공간은 구멍(hole)이 생기고 이 부분을 양성자(proton)이라고 생각했다. 그



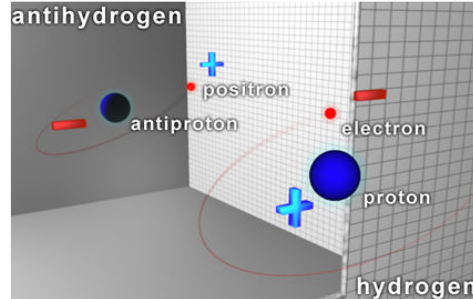
디랙의 바다에서의 물질-반물질쌍 생성과 붕괴

러나 전자와 양성자의 큰 질량차이로 인해 양성자가 아닌 양전자 (positron, positive electron, $+e$)라고 명명하였다.

디랙의 바다(Dirac sea)라고 불리는 에너지상태는 미리 음의 에너지가 모두 채워진 영역에 양의 에너지를 지닌 전자들이 떠있는 상태라고 보았다. 파울리 배타원리에 의해 어떠한 추가적인 전자도 음의 에너지를 가질 수 없다고 보았다. 음의 에너지를 지닌 전자의 결핍으로 생긴 홀(hole)은 입자와 같이 행동을 하며, 음전하를 잃기 때문에 양전하를 지녔다고 보았다. 이 구멍을 채우고 있던 E라는 에너지를 지닌 전자는 $2E$ 의 에너지를 발산하면서 음의 에너지로 가득 찬 진공에서 벗어날 수 있다. 가상의 음의 에너지를 지닌 전자의 바다에서 최소한 $2mc^2 (=2E=2h\nu=1.022 \text{ MeV})$ 의 에너지를 받아서 전자와 홀이라는 물질-반물질 쌍 생성(pair creation)이 이루어지며, 다시 쌍 붕괴(pair annihilation)을 통해 $mc^2 (=h\nu=0.511 \text{ MeV})$ 의 에너지를 발산한다.

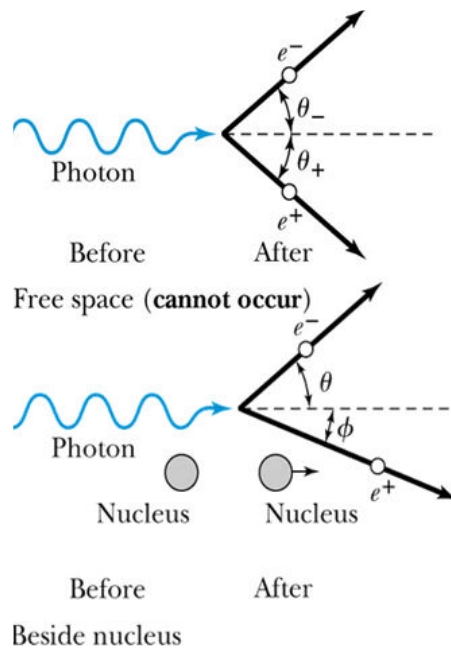
■ 쌍 생성과 붕괴

디랙의 예측은 오늘날 모든 물질은 거울상 대칭의 성질을 지닌 반물질이 있다고 보고 있다. 물질과 물질 사이는 인력이 작용하듯이 반물질-반물질에서도 인력이 작용한다고 보았다. 단 물질과 반물질 사이는 척력이 있기 때문에 서로 함께 있으려 하지 않고 떨어져 있는 상태를 유지한다고 보았다. 따라서 아주 짧은 시간동안 쌍 생성을 유지하다가 곧 쌍 붕괴 과정을 거치게 된다.



■ 물질과 반물질의 거울상 대칭

하이젠베르크의 불확실성의 원리에 준하여 쌍 생성/붕괴에 해석해 보면, $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ 라는 원리에 의해 매우 짧은 시간동안 ($\Delta t \rightarrow 0$)에는 $\Delta E \rightarrow \infty$ 가 되어 충분한 에너지를 지니게 된다. 이때 무한히 작은 시간동안 충분한 에너지로 인해 척력을 이길 수 있는 물질-반물질 쌍이 생성되고, 그 짧은 시간이 지나면 다시 쌍 붕괴가 일어난다고 해석할 수 있다. 생성과 붕괴 과정이 너무 짧은 시간내에

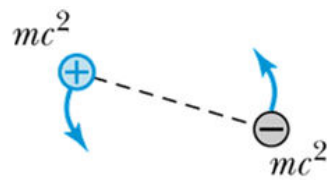


■ 진공과 핵 주변에서의 쌍 생성

이루어지기 때문에 반물질의 개념이 가상의 입자로 파악될 수밖에 없었다.

광자가 전자를 생산하면 전하량 보존(charge conservation)에 의해 양전하를 지닌 물질을 생산하게 된다. 즉 $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ 가 된다. 진공에서 감마선이 붕괴하여 두 개의 물질을 생산했다면, $h\nu = E_+ + E_-$ 로 에너지를 보존해야 한다.

그러나 입자가 가질 수 있는 최상위값과 최하위값이 같다는 모순에 빠지게 된다. 따라서 진공에서는 쌍생성이 발생되지 않고, 다른 물질 주변에서 광자에 의한 쌍생성이 가능하다. 단 이때



|붕괴전의 포지트로늄|

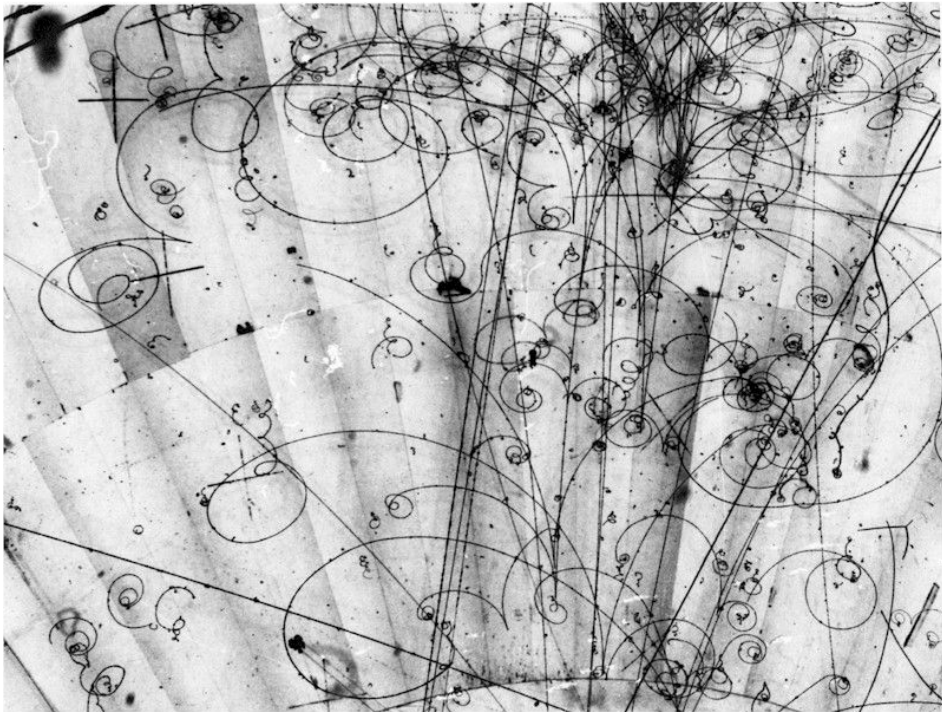
는 추가적인 운동에너지가 필요하므로 $h\nu$ 는 $2mc^2$ 보다 커야지만 쌍생성이 가능하다. 발생한 전자와 양전자는 원자와 같은 배치를 지니면서 서로 붙잡고 회전하는 형태인 포지트로늄(positronium)을 형성한다. 진공상에서는 쌍 붕괴 과정에서 에너지 보존에 의해 어떠한 빛도 추가적으로 발생하지 않는다. 그러나 우너자핵 주변에서 쌍생성된 경우는, 쌍 붕괴과정에서 핵이 흡수했던 에너지 만큼인 $h\nu = mc^2$ 의 에너지를 전자기파 형태로 방출하게 된다.

■ 반물질의 관찰

디랙이 예언했던 반물질의 존재를 최초로 규명한 사람은 앤더슨(Carl Anderson, 1905-1991)이다. 그는 1932년에 강력한 자기장이 걸린 안

개상자(cloud chamber)를 만들어 우주에서 쉴 새 없이 날아오는 우주선(cosmic ray) 입자에서 반물질인 양전자가 있다는 것을 관측하였다. 안개상자에는 자기장이 걸려 있기 때문에 입자가 띠고 있는 전하에 따라 좌우로 구부러진다. 자기장에 의해서 음전하를 지닌 입자는 왼쪽으로 휘고, 양전자를 지닌 입자는 오른쪽으로 휘다는 것을 관측하였다. 이 입자의 질량을 측정해 본 결과 전자의 질량과 동일하다는 것을 알았다. 외부 자기장을 걸어주지 않으면, 쌍 생성과 붕괴로 인한 궤적은 더 이상 나타나지 않게 된다. 그러나 앤더슨은 디랙의 이론을 모르고 있던 터라 최초의 발견에도 불구하고 스스로는 크게 중요하지 않았다.

그의 발견이후, 1955년 반양성자(anti-proton), 1956년 반중성

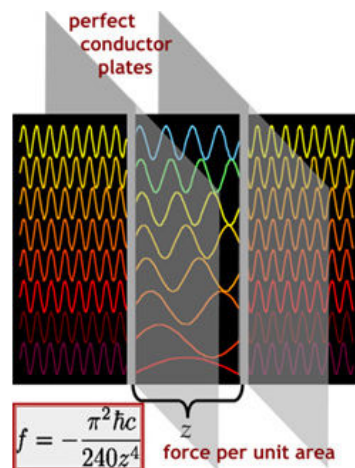


[15 ft 안개상자를 이용한 반물질 관찰 실험(페르미랩)]

자(anti-neutron), 1995년 중양자(deuteron, 양성자와 중성자로 구성된 입자)의 반물질인 반중양자(anti-deuteron)이 발견되었다. 안개상자로는 더 이상 새로운 입자를 발견하기가 쉽지 않게 되면서, 입자 가속기를 사용하게 되었다.

■ 응용분야

가상의 입자를 형성하기 위해서는 질량의 양자요동(quantum fluctuation)이 발생한다고 본다. 이 과정을 카시미르(Hendrik Casimir, 1909-2000) 효과라고 부른다. 현실에서도 이러한 효과를 관찰할 수 있다. 진공에서 전하를 지닌 두 판 사이가 충분히 가깝게 설치되어 있을 때, 매우 큰 전자기적 양자 요동이 발생한다. 이때 두판 사이의 안쪽면보다 바깥면에서 인력이 작용하여 두판을 좁히려고 한다. 그러나 안쪽에서는 서로 일정 거리를 유지하려는 현상이 발생한다. 단 이 효과가 발생하기 위해서는 일정간격이 필요한데, 판형은 0.6~6 μm , 원통형은 15 nm 이하의 크기를 요한다. 카시미르 힘은 판 사이의 거리에 4제곱의 역수에 비례하므로, 거리가 조금이라도 멀어지면 이 효과는 바로 사라진다.



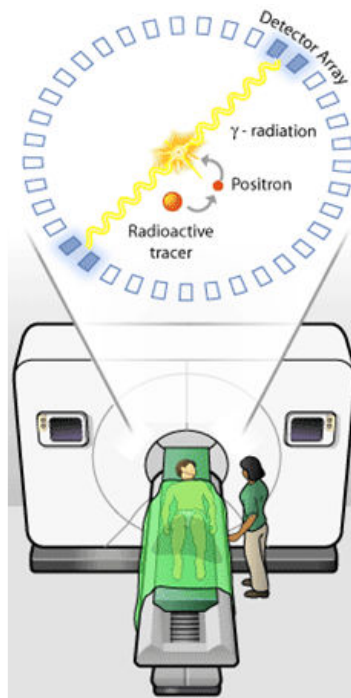
카시미르 효과

역카시미르(reverse Casimir) 효과를 이용하여 공중부양이라는 기술을 개발하고 있다. 주로 나노크기의 기계적 가공을 필요로 하는 나노머시닝(nanomachine)에서 작동 모터나 레버들의 마찰력을 감소시키기 위해, 표면을 대전시켜 기계적인 부양을 시도하고 있다.

양전자를 현실에서 사용하는 또 다른 사례로는 뇌 단층촬영기(MRI) 보다 훨씬 선명하고 컬러 정보를 얻을 수 있는 양전자단층촬영(PET, positron emission tomography)이 있다. 장비에서 발생시킨 감마선이 붕괴되면서 $-e$, $+e$ 를 만들고 양전자가 신체내의 $-e$ 와 결합하고 다시 붕괴하는 과정에서 빛(전자기파)을 발생하게 된다. 이를 검출하여 뇌정보를 파악하게 된다. 세계에서 PET을 최초로 개발한 사람은 가천의대 뇌과학연구소의 조장희(1936-) 박사이다.



나노모터



양전자 단층 촬영기

■ 등장인물 살펴보기



폴 디랙(Paul Dirac, 1902-1984)

영국의 이론물리학자이다. 원자 이론의 새로운 형식의 발견으로 1933년 슈뢰딩거와 함께 노벨 물리학상을 받았다. 디랙 방정식으로 양자역학 분야를 집대성 하였으며, 이를 이용하여 페르미온의 거동을 설명했다. 또한 반물질의 개념을 도입하여 양전자의 존재 가능성을 시사하였다.



칼 앤더슨(Carl Anderson, 1905-1991)

미국의 물리학자이다. 안개상자 실험을 통해 우주선에서 양전자를 직접 관찰한 것으로 유명하다. 이 공로로 1936년 노벨 물리학상을 수상하였다. 또한 뮤온(muon)을 발견하기도 하였다. 그는 캘리포니아 공대(Caltech)에서 근무하였으며, 2차 세계대전때는 로켓을 연구하였다.



헨드릭 카시미르(Hendrik Casimir, 1909-2000)

독일의 물리학자이다. 1934년 두 유체의 초전도 연구와 1948년 카시미르 효과 연구로 유명하다. 박사후에 파울리의 조교로 일하기도 하였으며, 열전도와 전기전도에 관한 깊이 있는 연구도 수행하였다. 극저온에서 초전도현상에 관한 많은 연구 결과를 남겼다.



조장희(1936-)

한국의 과학자이다. 서울대 전자공학과를 나온 뒤, 울산대학교에서 전자물리학 박사를 하였다. 1972년부터 컴퓨터 단층촬영에 관한 연구를 시작하여, 양전자단층촬영기를 세계 최초로 개발하였다. 현재는 가천의대 석좌교수겸 뇌과학연구소 소장, 카이스트 특훈교수로 재직중이다.