

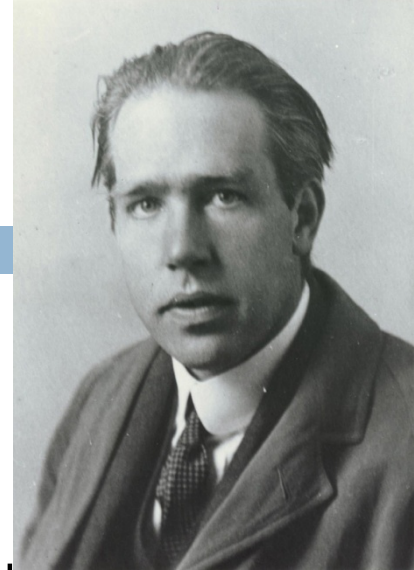
11.보어원자모형

화공과 김영훈 교수

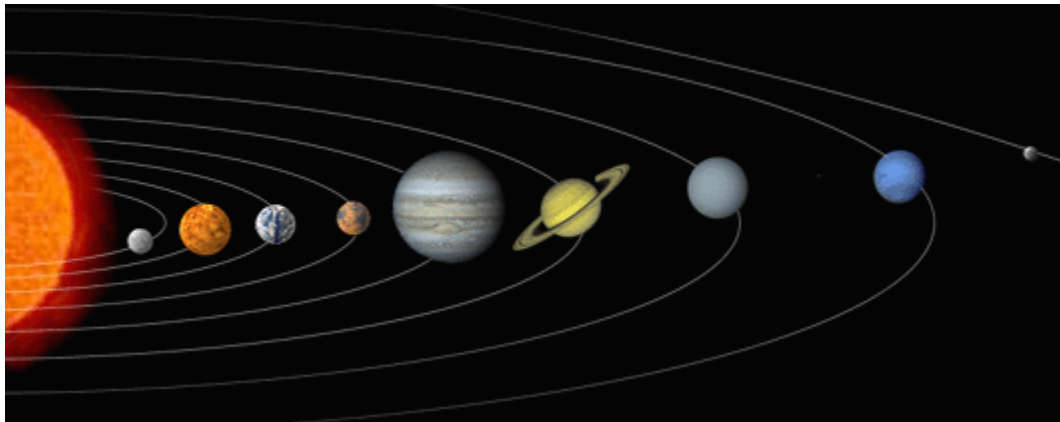
korea1@kw.ac.kr

보어(Niels Bohr)

2



- 보어의 원자 모델 제안 배경
 - ▣ 러더퍼드 모형 문제점: 원자형태 소실
 - 뉴턴역학과 맥스웰 전자기학 위배되는 현상
 - ▣ 원자형태 소멸 해결하는 모델 제안
 - 플랑크 에너지 양자가설 + 아인슈타인 광양자설
 - ▣ → 변형 행성 모델(태양계 모델) 제안



보어 모델 개념

3

□ 1913년 모델 제안

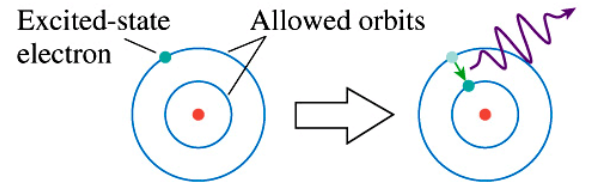
□ Orbiting electron 개념

- 러더퍼드 + 드브로이 = 보어

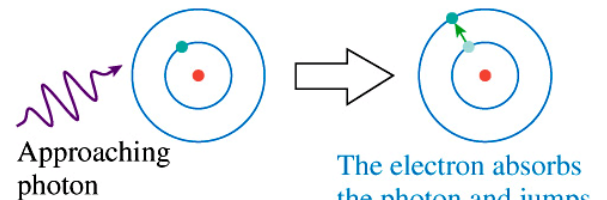
□ 기본 가정: 에너지, 각운동량 양자화

- $h\nu = E_U - E_L$, $mvr = \hbar n$
- 바닥상태(ground state) 보다 더 낮은 에너지 상태는 없다
- 원자는 일정한 에너지 준위 차이만큼의 에너지를 흡수/방출한다
- 전자의 에너지는 양자화 되어 있다
- 모든 원소는 서로 다른 전자 orbit을 가지므로, 서로 다른 휘선스펙트럼을 보인다
- 휘선스펙트럼은 입자-전자의 충돌로 설명된다

(a) Emission and absorption of light

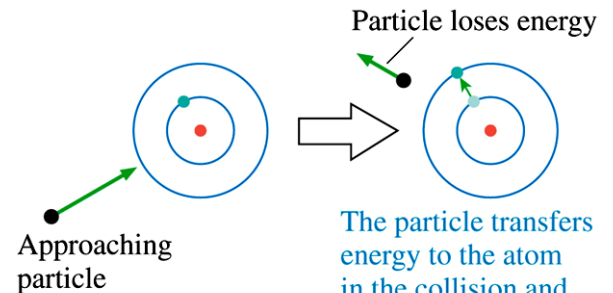


The electron jumps to a lower-energy stationary state and emits a photon.



The electron absorbs the photon and jumps to a higher-energy stationary state.

(b) Collisional excitation



The particle transfers energy to the atom in the collision and excites the atom.

두가지 문제 해결

4

- 1. 전자 공전시에도 원자 크기 유지 원인
 - ▣ 전자궤도가 불연속이어야 원자에너지도 불연속
 - ▣ 정상상태: 에너지 손실 없이 같은 궤도 공전상태
 - ▣ 플랑크 개념(에너지 양자 가설) 사용

- 2. 회선스펙트럼 발생 원인
 - ▣ 사고실험에서와 같이 빛에너지인 양자가 작은 상자 출입시 불연속적인 값을 지니고, 상자안의 에너지도 불연속이 됨
 - ▣ 상자 내외부 출입(전이)시에 광양자는 에너지를 흡수/방출하며, 이때 회선스펙트럼 보임
 - ▣ 아인슈타인 개념(광양자설) 사용

□ 3가지 postulates

- 원자는 전자가 회전하는 정해진 궤도를 지니며, 일정하게 회전시 전자는 빛을 방출하지 않으며 이 때를 정상상태라고 한다
- 전자가 한 궤도에서 다른 궤도로 전이시 빛(광양자)을 흡수/방출 한다
- 전자가 안정된 궤도를 회전시(정상상태)에는 전자는 고전론을 따른다

보어의 진동수 관계식

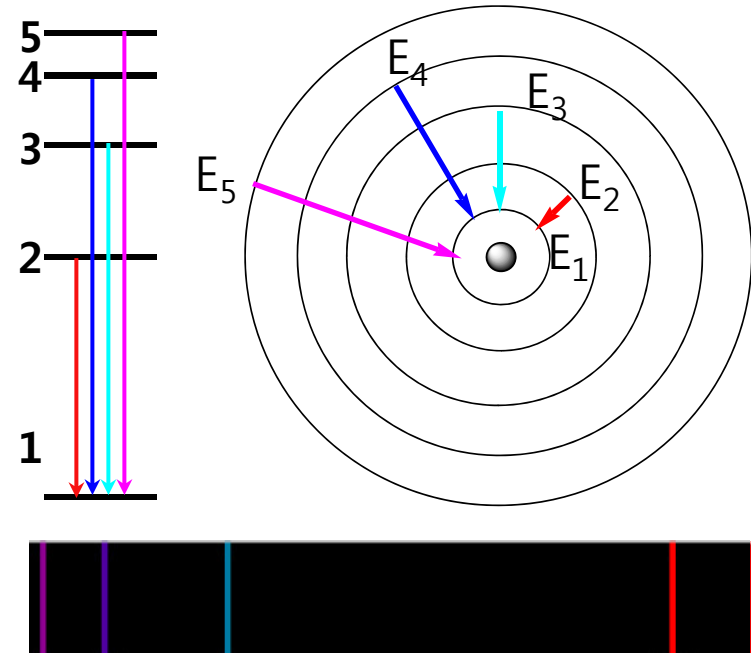
6

□ 전이 에너지: $W_n - W_m = h\nu$

□ $\nu = \frac{W_n}{h} - \frac{W_m}{h}$

□ Maxwell: 전자회전시 E 방출

□ Bohr: 전자 궤도 변경시



□ 리드버그 공식과 일치

□ $\nu = \frac{Rc}{m^2} - \frac{Rc}{n^2} \rightarrow$ 두식 일치하려면, $\frac{W_n}{h} = -\frac{Rc}{n^2}$

정상상태의 전자 에너지

7

- 양자수(n)에 따른 정상상태 에너지

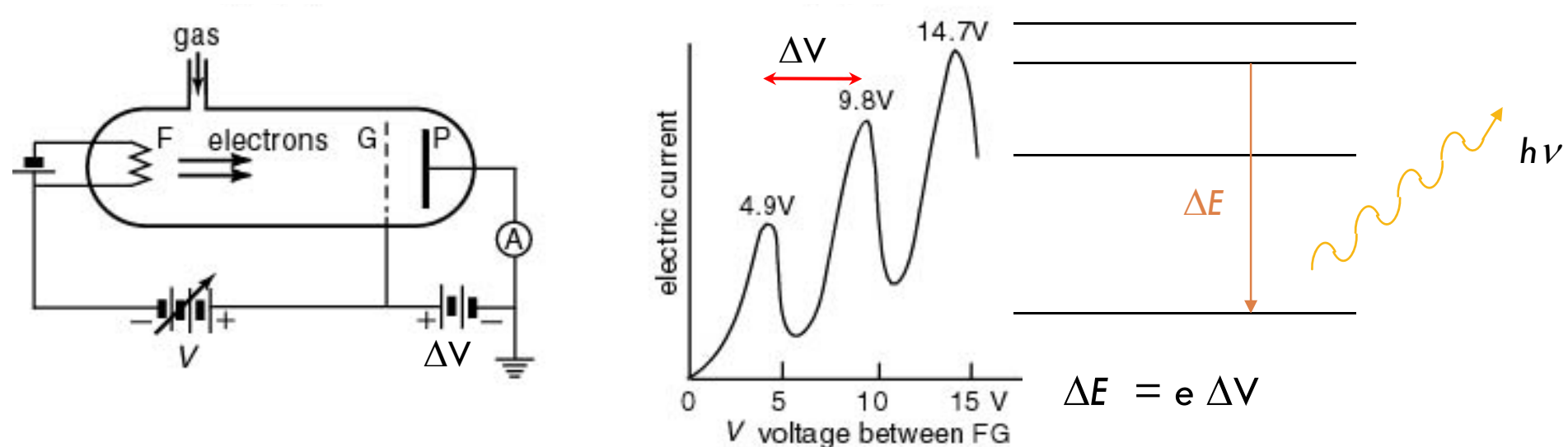
$$W_n = -\frac{Rhc}{n^2}$$

- 수소의 휘선: 에너지 불연속성 설명
- 실제 이런 값이 존재하는가?
- → Franck-Hertz 실험으로 증명(1915년)

Franck-Hertz 실험

8

- 전자속도 조절: F-G 사이 전압조절 통해
 - ▣ 전압증가시, 어느정도 이상에서 광양자 발생
 - ▣ 특정전압에서 기체(Hg)가 전자에 의해 quantum jump 발생 → 전류 급감
 - ▣ 원자의 에너지 준위는 불연속이다!!



n궤도에서의 보어 기본진동수

9

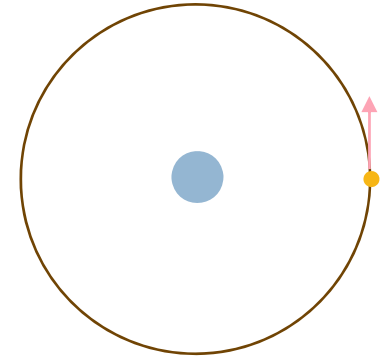
- 대응원리(correspondence principle) 이용
 - $E \propto \frac{1}{n^2} \rightarrow$ if large n , 에너지 준위 차이 없어지고, 에너지 준위 연속적으로 보임
 - 전자 회전시 빛 방출하는 것처럼 보임
 - 보어 모델 = 고전론 모델
- m 은 n 에서 t 궤도로의 전이 ($m=n-t$)
 - $$\nu = \frac{Rc}{m^2} - \frac{Rc}{n^2} = -\frac{Rc}{n^2} + \frac{Rc}{(n-t)^2} \approx \frac{2Rc}{n^3}t$$
 - 휘선 발생하는 진동수는 기본진동수의 t 배이다

고전론에서의 기본진동수

10

- 구심력(쿨롱힘) = 원심력(각운동량)

$$\square k \frac{e^2}{r^2} = m r \omega^2 = m r (2\pi\nu)^2 \rightarrow \nu = \sqrt{\frac{ke^2}{4\pi^2 m r^3}} = \frac{v}{2\pi r}$$



- 보어에너지 vs. 고전론 에너지

$$W_n = -\frac{Rhc}{n^2}$$

$$W = -k \frac{e^2}{2r}$$

$$n = \sqrt{\frac{Rhc}{W_n}}$$

$$r = \frac{ke^2}{2|W|}$$

리드버그 상수 도출

11

- 대응원리: "보어 v =고전론 v " @large n
 - ▣ 빛 발생과정은 전혀 다르나, 에너지는 같다

- $m=9.109 \times 10^{-28}$ g
- $e^2=23.04 \times 10^{-20}$ gcm³/s²
- $h=6.626 \times 10^{-27}$ gcm³/s
- $c=2.998 \times 10^{10}$ cm/s
- $\epsilon_0=8.85 \times 10^{-12}$ F/m
- $R=1.0973 \times 10^5$ cm⁻¹

$$\frac{2Rc}{n^3} = \sqrt{\frac{ke^2}{4\pi^2mr^3}}$$

$$\frac{2Rc}{\left(\sqrt{\frac{Rhc}{W_n}}\right)^3} = \sqrt{\frac{ke^2}{4\pi^2m\left(\frac{ke^2}{2|W|}\right)^3}}$$

$$R = \frac{2\pi^2me^4k^2}{ch^3} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2ch^3}$$

- 에너지준위, $W_n = -\frac{Rhc}{n^2} = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2h^2} \frac{1}{n^2} = -13.6eV \frac{1}{n^2}$

참고. 고전론 총에너지 유도

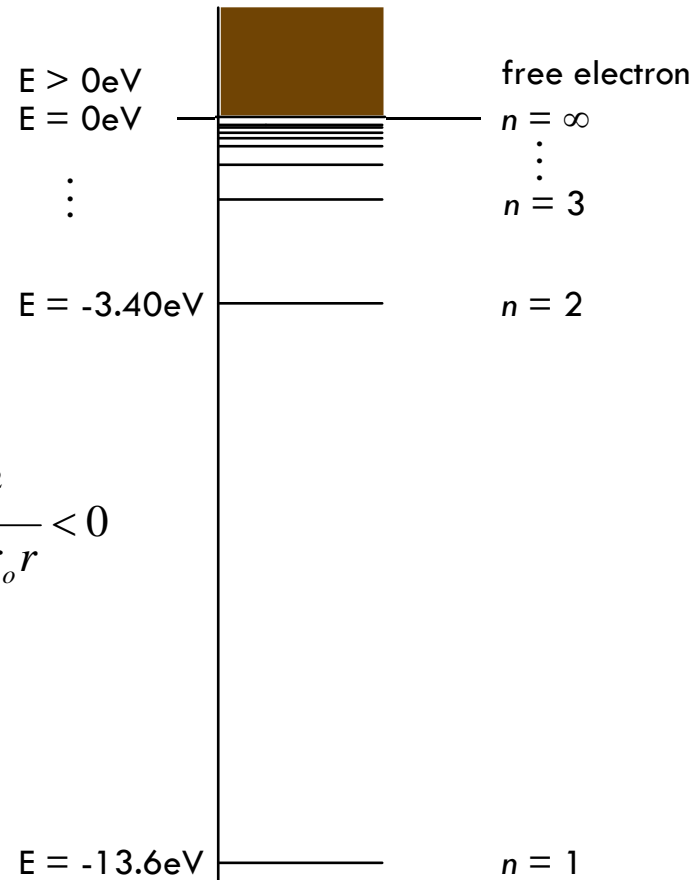
12

□ 전자속도: $k \frac{e^2}{r^2} = mr\omega^2 = m \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 mr}} \ll c$

□ 총에너지 = $E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + k \frac{e^2}{r}$

□ $E_p = \int_x F_c dx = \int_{\infty}^r k \frac{e^2}{r^2} dr = -k \frac{e^2}{r} = -2E_k$

□ $E = E_k + E_p = -\frac{1}{2}E_p + E_p = \frac{1}{2}E_p = -\frac{ke^2}{2r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} < 0$



원자지름 = 원자크기

13

□ 대응원리: 양자론 E = 고전론 E

$$\square E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$\square r = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} n^2 = a_0 n^2 \quad \text{where, } a_0 = 0.5298 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

$$\square @n=1, r=a_0 \rightarrow \text{원자크기} = 1.06 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

보어의 양자조건

14

□ 정상상태

□ de Broglie의 물질파 개념

□ 전자운동 궤도($2\pi r$)을 따라 물질파가 정상파 형성 조건 \rightarrow 이때는 전자기파 발생 없음

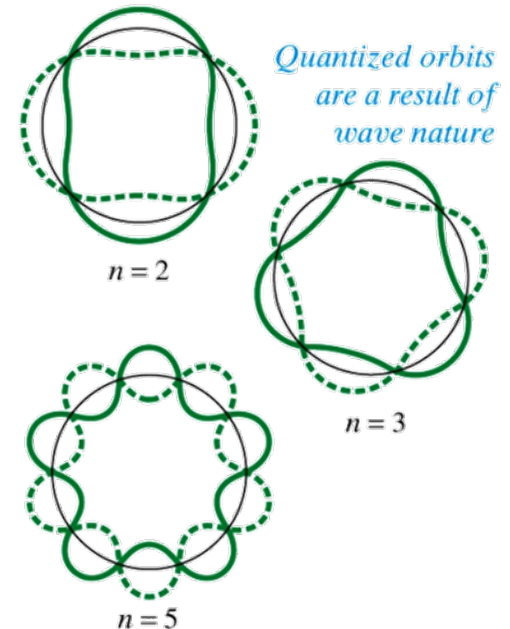
□ 보어의 양자조건

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} = \frac{h}{e} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 r}{m}} \quad 2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{mv}$$

□ 검산

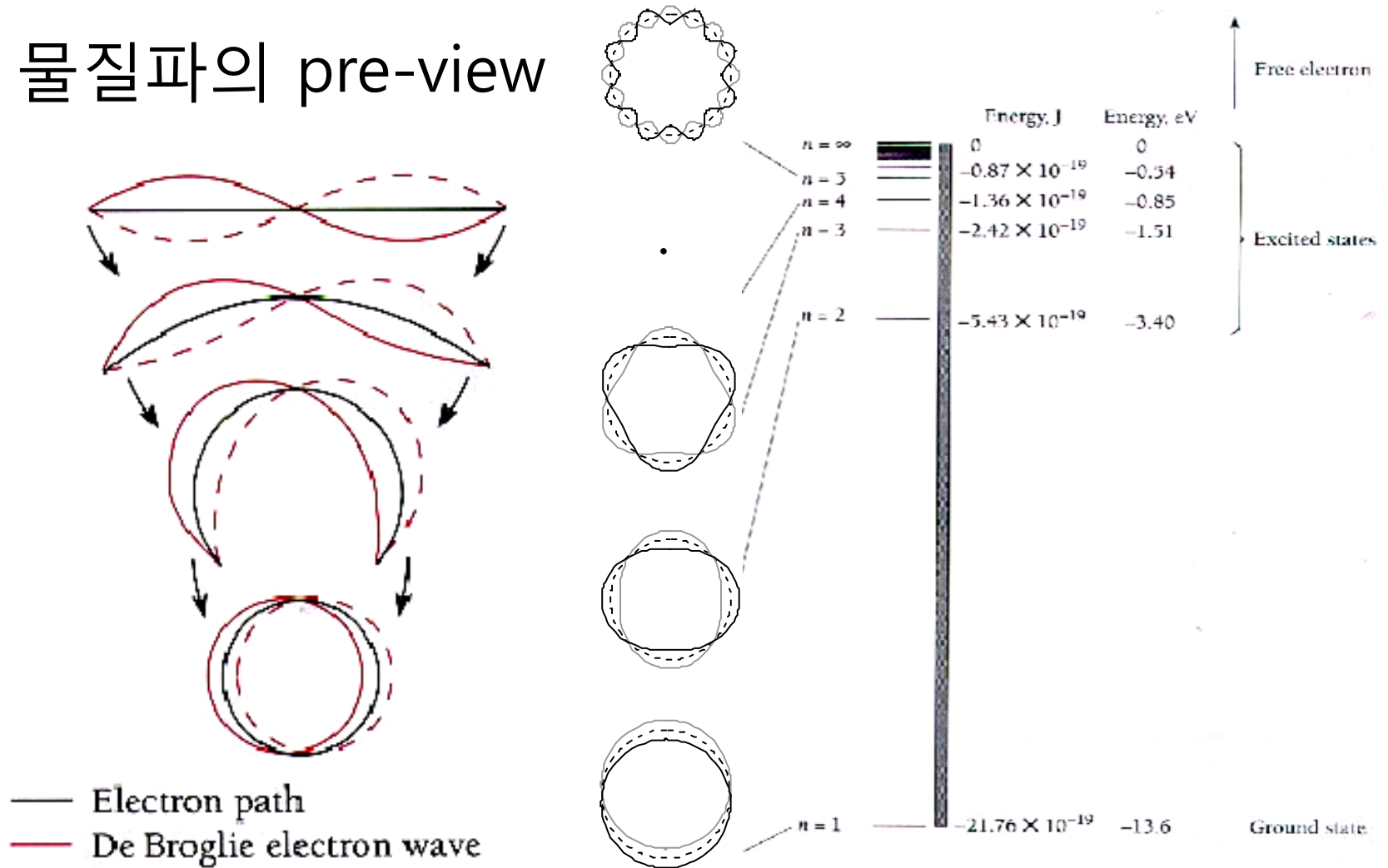
■ @ $r=0.053$ nm, $\lambda=0.33$ nm= $2\pi r$

■ \rightarrow 보어의 양자조건 만족



전자궤도내 정상파

□ 물질파의 pre-view



n궤도에서 전자의 가능속도 예측

□ n궤도의 속도

$$\square v_n = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 mr}} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 ma_0}} \frac{1}{n} = \frac{v_1}{n}$$

□ 3.6×10^5 m/s가 가능한가?

□

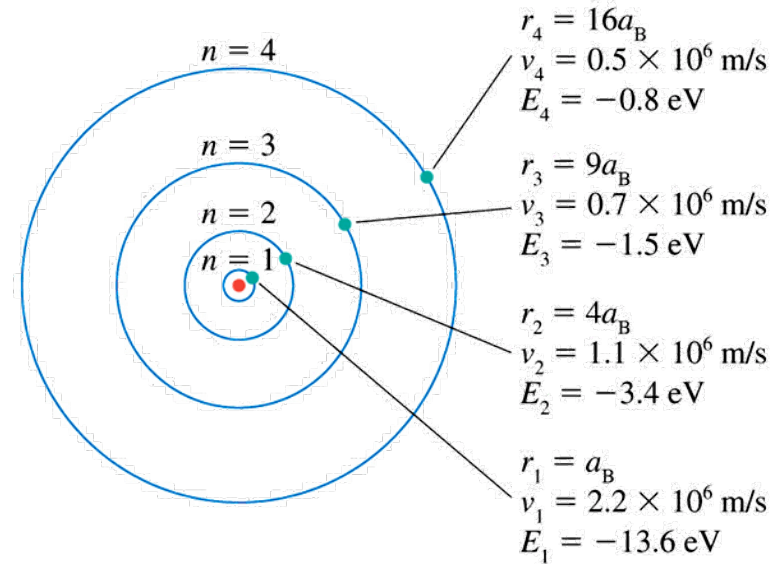


TABLE 38.2 Radii, speeds, and energies for the first five states of the Bohr hydrogen atom

n	r_n (nm)	v_n (m/s)	E_n (eV)
1	0.053	2.19×10^6	-13.60
2	0.212	1.09×10^6	-3.40
3	0.476	0.73×10^6	-1.51
4	0.846	0.55×10^6	-0.85
5	1.322	0.44×10^6	-0.54

각운동량: 원 운동

17

□ 보어양자조건 증명

□ 각운동량, $L = pr = (mv)r = mr^2\omega$

□ $mr\omega^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \rightarrow e^2 = 4\pi\epsilon_0 mr^3\omega^2, r = \frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2} n^2$

□ $E = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \qquad L^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} n^2$

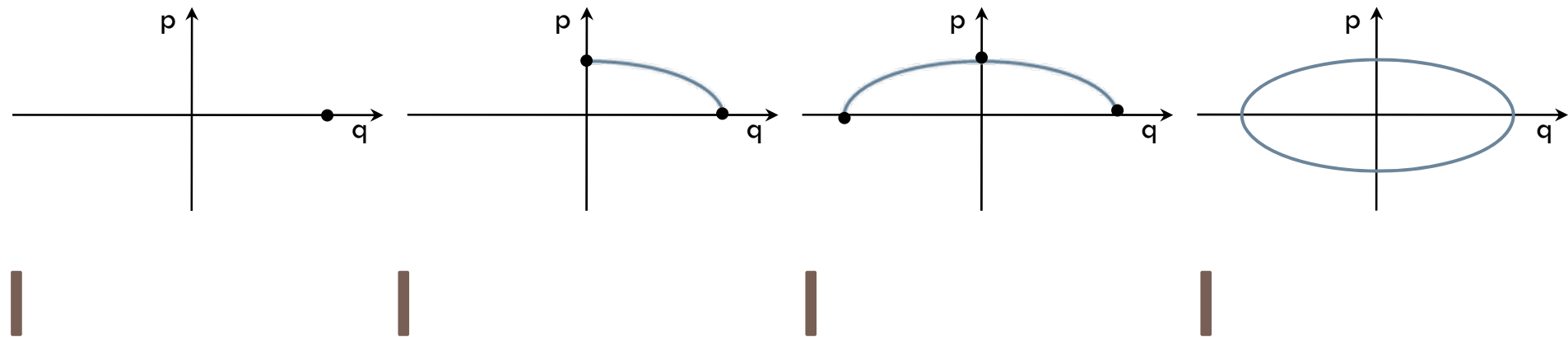
□ 보어양자조건: 원자종류 무관한 성질 도출

- h 와 L 이 같은 단위: 원자에너지의 불연속성인 h 와 각운동량 L 이 같은 단위이므로, 에너지의 불연속성은 각운동량의 불연속성으로 정의된다

Sommerfeld의 반기

18

- 좀머펠트의 생각
 - ▣ 보어양자조건은 원운동에 국한
 - ▣ 양자는 원, 타원 운동만 하는 것이 아니다
- 위상평면 개념 도입
 - ▣ 운동량(p), 위치(q)의 2차원 평면정보
 - ▣ 예) 용수철 단조화운동(simple harmonic oscillation): 타원 위상평면



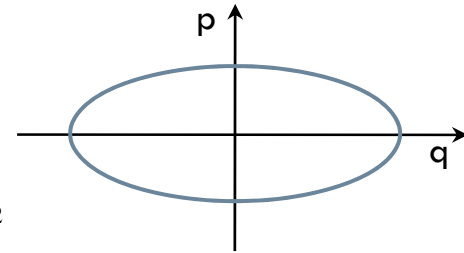
조화진동 에너지 식

19

□ 에너지 보존 법칙 이용

$$E(p, q) = E_k + E_p = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$$

$$1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{k}{2E}q^2 = \frac{p^2}{(\sqrt{2mE})^2} + \frac{q^2}{(\sqrt{2E/k})^2} = \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}$$



□ 타원면적: 반복 운동하는 물체의 한 주기 표시

$$J = \pi ab = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}} = E \frac{2\pi}{\omega} = \frac{E}{\nu} = hn$$

□ 반복, 원, 타원 등의 운동하는 전자의 양자조건

$$\oint pdq = hn$$

전이(transition)

20

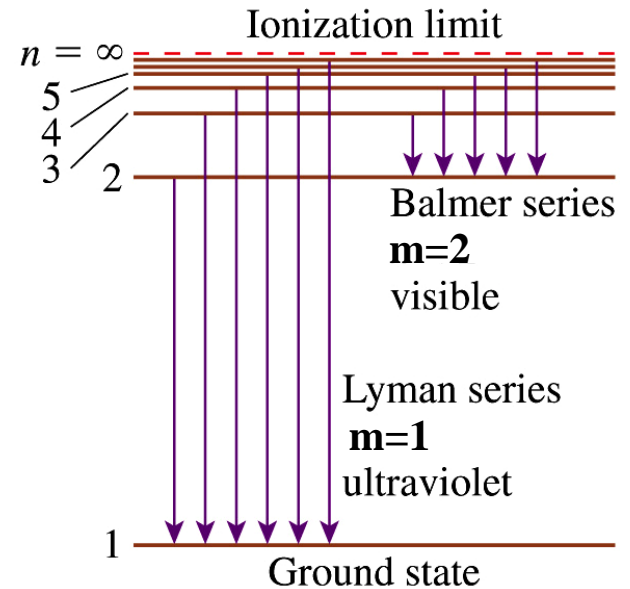
□ 전이상태에서 빛 발생

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{\Delta E_{\text{atom}}}{h} = \frac{E_n - E_m}{h} \\
 &= \frac{1}{h} \left\{ \left[-\frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2a_B} \right) \right] - \left[-\frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2a_B} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2ha_B} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad a_B \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{me^2}
 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{8\pi\epsilon_0 hca_B}{e^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)^{-1}$$

$$\lambda_0 \equiv \frac{8\pi\epsilon_0 hca_B}{e^2} = 9.112 \times 10^{-8} \text{ m} = 91.12 \text{ nm}$$

$$\lambda_{n \rightarrow m} = \lambda_0 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)^{-1}$$



수소와 유사한 원자들

21

- 보어모델 적용대상
 - Hydrogen-like atom
 - 핵내 Z개의 양전자와 1개의 오비탈 전자 보유

TABLE 38.3 Comparison of hydrogen-like ions with $Z = 1, 2,$ and 3

Ion	Diameter $2r_1$	Ionization energy $ E_1 $	Wavelength of $3 \rightarrow 2$
H ($Z = 1$)	0.106 nm	13.6 eV	656 nm
He ⁺ ($Z = 2$)	0.053 nm	54.4 eV	164 nm
Li ⁺⁺ ($Z = 3$)	0.035 nm	125.1 eV	73 nm

$$V_{\text{elec}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}; \quad r_{nZ} = \frac{n^2 a_B}{Z};$$

$$v_{nZ} = Z \frac{v_1}{n} = \left(\frac{Z}{n} \right) 2.19 \times 10^6 \text{ m/s};$$

$$E_{nZ} = -\frac{Z^2}{n^2} E_B = -\frac{Z^2}{n^2} 13.60 \text{ eV};$$

$$\lambda_{0Z} = \frac{\lambda_0}{Z^2} = \frac{91.18 \text{ nm}}{Z^2}$$

빛의 강도 해석 문제

22

- 보어모델: 휘선 스펙트럼 해석 가능
 - ▣ 휘선의 밝기 차이는 어떻게 해석하는가?
 - 고전론: (진폭)²에 비례
 - 보어론: 파동이 아니므로 진폭 구하지 못하고, 전이확률에 비례 → 즉 많은 전자 전이시에 빛 강도 세다
 - ▣ 전이확률의 문제점
 - 전이 mechanism이 무엇인가
 - 순간이동이 발생한다는 것인가
 - 전이과정의 전자위치 파악과 운동량 파악 분리되는가

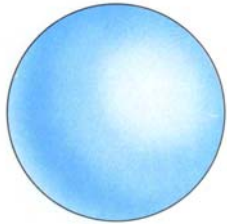
보어원자 모델의 성공과 실패

23

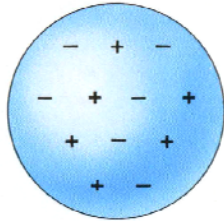
- 성공
 - ▣ 원자의 안정성 설명(원자 크기 유지)
 - ▣ 불연속적인 스펙트럼 설명
- 실패
 - ▣ 2개 이상의 전자지닌 원자 설명 불가
 - ▣ 휘선의 조도 차이 설명 불가
 - ▣ 전자위치와 운동량 동시 해석 불가

설명모델	진동수		빛 세기
	n 작을 때	n 클 때	
고전모델	X	O	O
보어모델	O	O	X

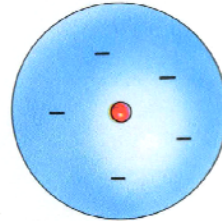
원자모델 정리



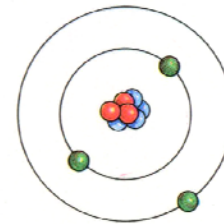
Greek model (400 B.C.)



Thomson's plum-pudding model (1897)



Rutherford's model (1909)



Bohr's model (1913)



Charge-cloud model (present)

