Polymath를 이용한 Diffusion Equation 풀기

Diffusion Equation

$$\frac{du}{dt} = \alpha \frac{d^2 u}{dx^2}$$

◈ 초기조건 $u(x,0) = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$

◈ 경계조건 $u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1)$

◈ 정확해 $u(x,t) = \sin x e^{-0.5t}$

$$\triangle x = 0.1\pi \quad \alpha = 0.5 \quad \triangle t = 0.02$$

modeling

U값을 구하기 위한 모델링을 해준다

$$\triangle x = 0.1\pi$$

경계조건에 의해

경계조건에 의해

u   u0=0   u1   u2   u3   u4   u5   u6   u7   u8   u9   u10=0
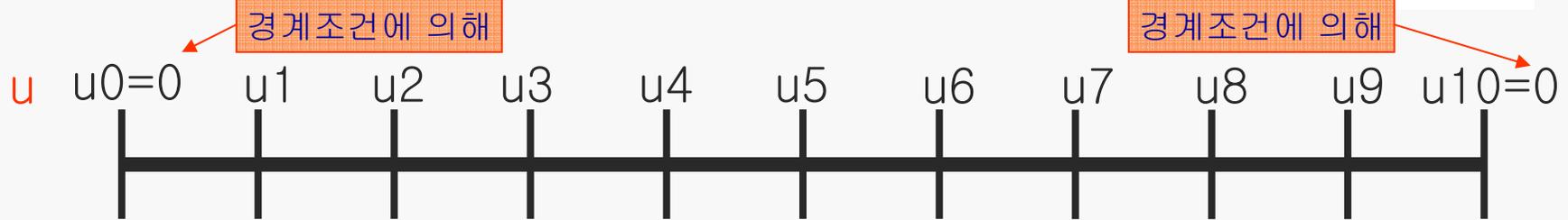
x   X0=0 X1=0.1π X2=0.2π X3=0.3π X4=0.4π X5=0.5π X6=0.6π X7=0.7π X8=0.8π X9=0.9π X10=π

초기값   sin0.1π sin0.2π sin0.3π sin0.4π sin0.5π sin0.6π sin0.7π sin0.8π sin0.9π

각각의 u에대한
식을 차분화 시켜줌

$$u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\triangle x)^2}$$

Diffusion equation을 차분화 해주고, 경계값과 초기값을 대입해준 후, 시간t에 대한 변화를 알아본다.

데이터 입력

POLYMATH 6.0 Professional Release - [Ordinary Differential Equation...]

File Program Edit Format Problem Examples Window Help

RKF45   ☑ Table ☐ Graph ☑ Report

Differential Equations: 9   Auxiliary Equations: 22 ✔ Ready for solution

```
d(u1)/d(t) = a * (u2 - 2 * u1 + u0) / deltax ^ 2
u1(0) = 0.309016994
d(u2)/d(t) = a * (u3 - 2 * u2 + u1) / deltax ^ 2
u2(0) = 0.587785252
d(u3)/d(t) = a * (u4 - 2 * u3 + u2) / deltax ^ 2
u3(0) = 0.809016994
d(u4)/d(t) = a * (u5 - 2 * u4 + u3) / deltax ^ 2
u4(0) = 0.951056516
d(u5)/d(t) = a * (u6 - 2 * u5 + u4) / deltax ^ 2
u5(0) = 1
d(u6)/d(t) = a * (u7 - 2 * u6 + u5) / deltax ^ 2
u6(0) = 0.951056516
d(u7)/d(t) = a * (u8 - 2 * u7 + u6) / deltax ^ 2
u7(0) = 0.809016994
d(u8)/d(t) = a * (u9 - 2 * u8 + u7) / deltax ^ 2
u8(0) = 0.587785252
d(u9)/d(t) = a * (u10 - 2 * u9 + u8) / deltax ^ 2
u9(0) = 0.309016994
```

```
a = 0.5
deltax = 0.1 * 3.141592654
u10 = 0
u0 = 0
```

```
t(0) = 0
t(f) = 1
```

```
z1 = sin(x1) * exp(-a * t)
x1 = 0.1 * 3.141592654
z2 = sin(x2) * exp(-a * t)
x2 = 0.2 * 3.141592654
z3 = sin(x3) * exp(-a * t)
x3 = 0.3 * 3.141592654
z4 = sin(x4) * exp(-a * t)
x4 = 0.4 * 3.141592654
z5 = sin(x5) * exp(-a * t)
x5 = 0.5 * 3.141592654
z6 = sin(x6) * exp(-a * t)
x6 = 0.6 * 3.141592654
z7 = sin(x7) * exp(-a * t)
x7 = 0.7 * 3.141592654
z8 = sin(x8) * exp(-a * t)
x8 = 0.8 * 3.141592654
z9 = sin(x9) * exp(-a * t)
x9 = 0.9 * 3.141592654
```

차분식 초기값

상수값

시간t의 초기값

시간t의 최종값

정확해 변수분리 식

변수 X값 고정

Tip
도구상자를 이용하여 하나의 식만 입력한 후
복사–붙여넣기를 하고 값들만 변경해 주면
손쉽게 데이터를 입력할 수 있음

오후 8:41 2005-11-29 CAPS NUM

Differential Equations Solver: Enter Differential Equation

Enter the differential equation:

$$\frac{d(u1)}{d(t)} = a * (u2 - 2 * u1 + u0) / deltax ^ 2$$

Set the initial value:
u1(0) = 0.309016994

Comment:

Clear   Done   Cancel

Differential Equations Solver: Enter Explicit Equation

Enter the explicit equation:
a = 0.5

Comment:

Clear   Done   Cancel

Polymath Guide

Step #1 of 2
Enter <t> initial value.

확인   취소

0

Polymath Guide

Step #2 of 2
Enter <t> final value.

확인   취소

1

Differential Equations Solver: Enter Explicit Equation

Enter the explicit equation:
z1 = sin(x1) * exp(-a * t)

Comment:

Clear   Done   Cancel

Differential Equations Solver: Enter Explicit Equation

Enter the explicit equation:
x1 = 0.1 * 3.141592654

Comment:

Clear   Done   Cancel

---

d(x)
각각의 차분화된 식을 입력
초기값 계산 후 입력
(다음페이지 엑셀을 통한 편리한 계산)

x=
상수값이나 정해진 값들을
직접입력

ini-fnl
변수 t의 초기값과 최종값
직접입력

x=
정확해를 변수분리(x고정)
하여 입력
(정확해를 따로 구분해주기위해 z로 놓았음)

x=
고정된 변수 x값 입력

초기값 엑셀을 이용한 계산

Polymath에선 초기값을 방정식으로 넣지 못함
데이터를 입력할 때 초기값을 일일이 계산해서 넣어줘야 함
->엑셀을 통해 초기값을 쉽게 구할 수 있음

곱해줌

	x값	x값	초기값	
	pi	3.141592654	sinx	
0.1	0.1*pi	0.314159265	0.309016994	u1일때의 초기값
0.2	0.2*pi	0.628318531	0.587785252	u2일때의 초기값
0.3	0.3*pi	0.942477796	0.809016994	u3일때의 초기값
0.4	0.4*pi	1.256637061	0.951056516	u4일때의 초기값
0.5	0.5*pi	1.570796327	1	u5일때의 초기값
0.6	0.6*pi	1.884955592	0.951056516	u6일때의 초기값
0.7	0.7*pi	2.199114858	0.809016994	u7일때의 초기값
0.8	0.8*pi	2.513274123	0.587785252	u8일때의 초기값
0.9	0.9*pi	2.827433388	0.309016994	u9일때의 초기값

deltax=0.1*pi일 때

x

sin

계산된 초기값을 데이터에 입력

데이터 입력(몇가지 Tip)
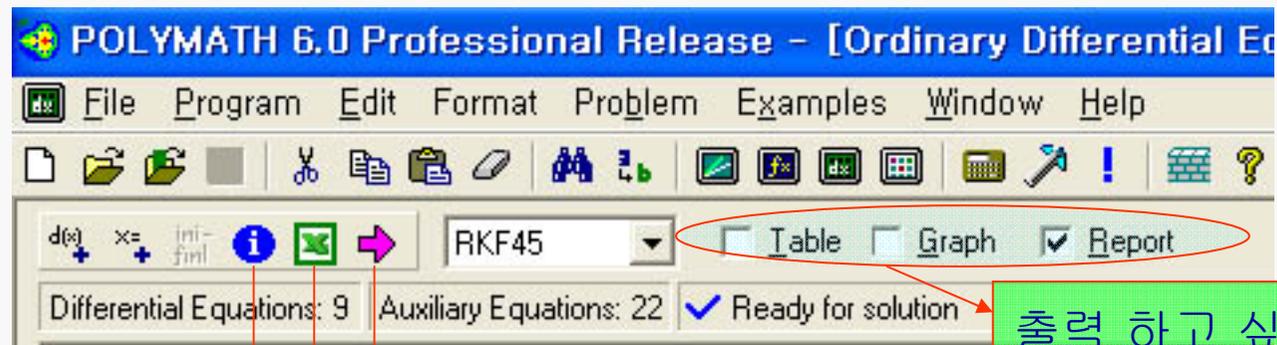
출력 하고 싶은 항목 클릭

모든 데이터를 입력한 후 이 버튼을 누르면 결과 출력됨
(입력데이터 값이 모두 타당할 경우에만 활성화 됨)

엑셀로 데이터 값들을 전환시킬 수 있음

데이터 입력상태를 체크 할 수 있는 기능

결과 출력(Report)

POLYMATH Report
Ordinary Differential Equations

Calculated values of DEQ variables

	Variable	Initial value	Minimal value	Maximal value	Final value
1	t	0	0	1.	1.
2	u1	0.309017	0.1881981	0.309017	0.1881981
3	u2	0.5877853	0.357974	0.5877853	0.357974
4	u3	0.809017	0.492709	0.809017	0.492709
5	u4	0.9510565	0.5792142	0.9510565	0.5792142
6	u5	1.	0.6090218	1.	0.6090218
7	u6	0.9510565	0.5792142	0.9510565	0.5792142
8	u7	0.809017	0.492709	0.809017	0.492709
9	u8	0.5877853	0.357974	0.5877853	0.357974
10	u9	0.309017	0.1881981	0.309017	0.1881981
11	a	0.5	0.5	0.5	0.5
12	deltax	0.3141593	0.3141593	0.3141593	0.3141593
13	u10	0	0	0	0
14	u0	0	0	0	0
15	x1	0.3141593	0.3141593	0.3141593	0.3141593
16	z1	0.309017	0.1874283	0.309017	0.1874283
17	x2	0.6283185	0.6283185	0.6283185	0.6283185
18	z2	0.5877853	0.3565098	0.5877853	0.3565098
19	x3	0.9424778	0.9424778	0.9424778	0.9424778
20	z3	0.809017	0.4906936	0.809017	0.4906936
21	x4	1.256637	1.256637	1.256637	1.256637
22	z4	0.9510565	0.5768449	0.9510565	0.5768449
23	x5	1.570796	1.570796	1.570796	1.570796
24	z5	1.	0.6065307	1.	0.6065307
25	x6	1.884956	1.884956	1.884956	1.884956
26	z6	0.9510565	0.5768449	0.9510565	0.5768449
27	x7	2.199115	2.199115	2.199115	2.199115
28	z7	0.809017	0.4906936	0.809017	0.4906936
29	x8	2.513274	2.513274	2.513274	2.513274
30	z8	0.5877853	0.3565098	0.5877853	0.3565098
31	x9	2.827433	2.827433	2.827433	2.827433
32	z9	0.309017	0.1874283	0.309017	0.1874283

Differential equations

1. $d(u1)/d(t) = a * (u2 - 2 * u1 + u0) / deltax^2$
2. $d(u2)/d(t) = a * (u3 - 2 * u2 + u1) / deltax^2$
3. $d(u3)/d(t) = a * (u4 - 2 * u3 + u2) / deltax^2$
4. $d(u4)/d(t) = a * (u5 - 2 * u4 + u3) / deltax^2$
5. $d(u5)/d(t) = a * (u6 - 2 * u5 + u4) / deltax^2$
6. $d(u6)/d(t) = a * (u7 - 2 * u6 + u5) / deltax^2$
7. $d(u7)/d(t) = a * (u8 - 2 * u7 + u6) / deltax^2$
8. $d(u8)/d(t) = a * (u9 - 2 * u8 + u7) / deltax^2$
9. $d(u9)/d(t) = a * (u10 - 2 * u9 + u8) / deltax^2$

Explicit equations

1. $a = 0.5$
2. $deltax = 0.1 * 3.1415...$
3. $u10 = 0$
4. $u0 = 0$
5. $x1 = 0.1 * 3.141592654$
6. $z1 = sin(x1) * exp(-a * t)$
7. $x2 = 0.2 * 3.141592654$
8. $z2 = sin(x2) * exp(-a * t)$
9. $x3 = 0.3 * 3.141592654$
10. $z3 = sin(x3) * exp(-a * t)$
11. $x4 = 0.4 * 3.141592654$
12. $z4 = sin(x4) * exp(-a * t)$
13. $x5 = 0.5 * 3.141592654$
14. $z5 = sin(x5) * exp(-a * t)$
15. $x6 = 0.6 * 3.141592654$
16. $z6 = sin(x6) * exp(-a * t)$
17. $x7 = 0.7 * 3.141592654$
18. $z7 = sin(x7) * exp(-a * t)$
19. $x8 = 0.8 * 3.141592654$
20. $z8 = sin(x8) * exp(-a * t)$
21. $x9 = 0.9 * 3.141592654$
22. $z9 = sin(x9) * exp(-a * t)$

u1과 u9, u2와 u8, u3와 u7, u4와 u6의 값이 같음
u5를 중심으로 대칭된 값을 갖음(양쪽 경계값이 같고, 초기값이 sin함수를 따르기 때문)

Numerical solution과 Analytical solution이 거의 비슷하게 나옴

z1과 z9, z2와 z8, z3와 z7, z4와 z6의 값이 같음
z5를 중심으로 대칭된 값을 갖음

결과 출력(Table)

결과 출력(Numerical solution Graph)

Excel로의 결과 출력(Numerical solution table)

Excel로의 결과 출력(Numerical solution Graph)

선택적 그래프 그리기
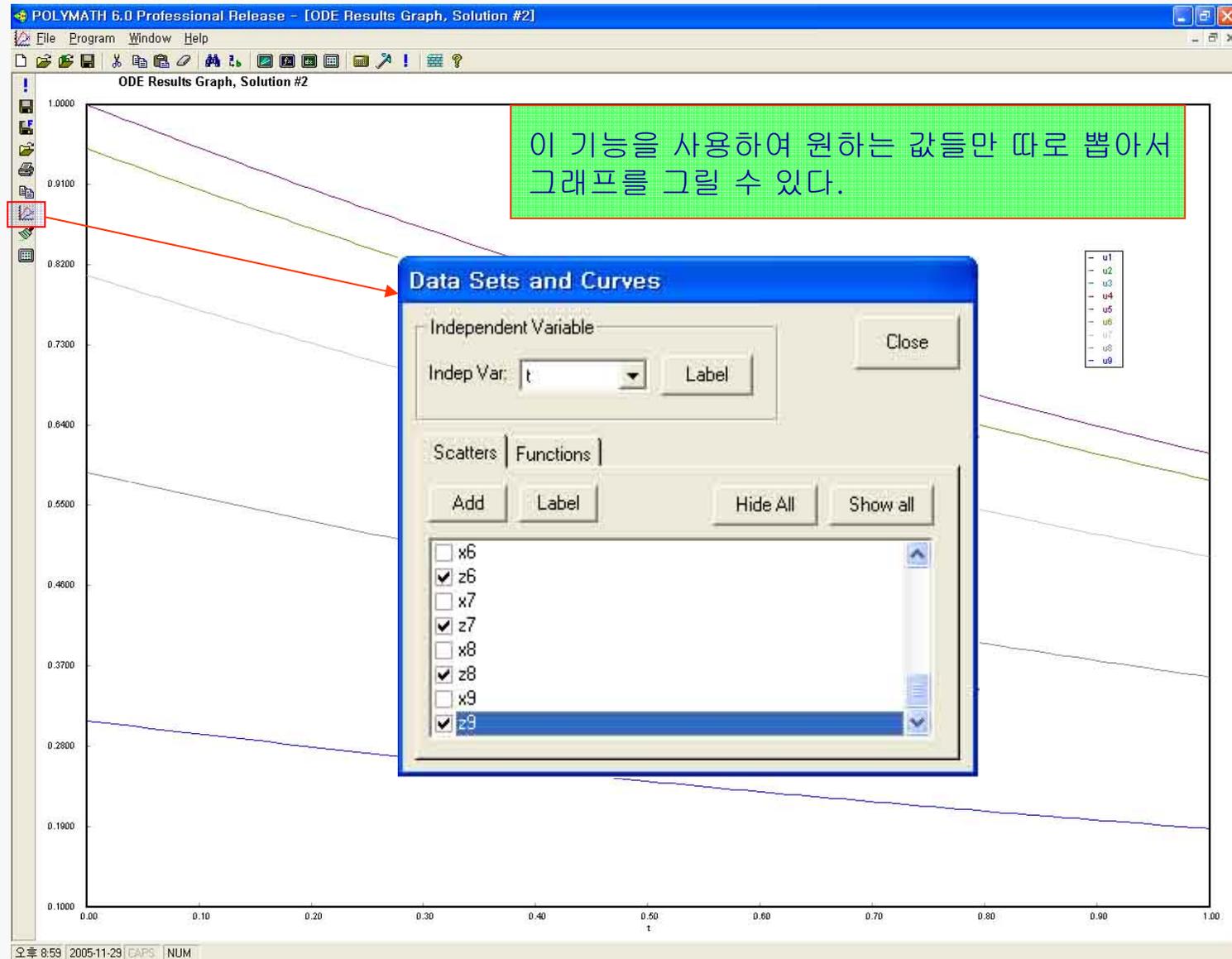
결과 출력(Analytical solution Graph)

z1과 z9, z2와 z8, z3와 z7, z4와 z6의 값이 같아서 그래프가 겹쳐서 나타남

$$u(x,t) = sinxe^{-0.5t}$$

Numerical solution(u)과 Analytical solution(z)의 비교
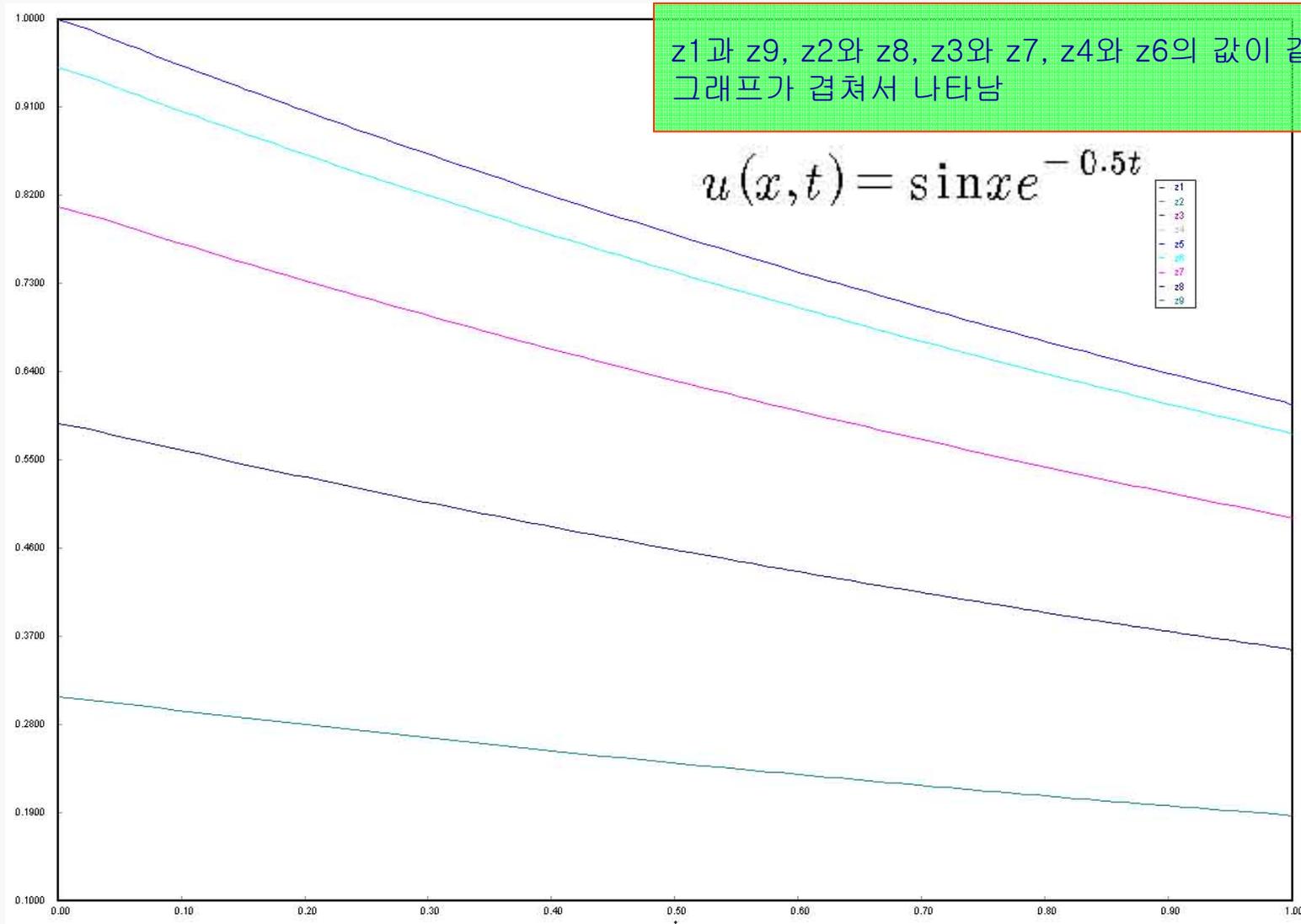
값 변화에 따른 그래프
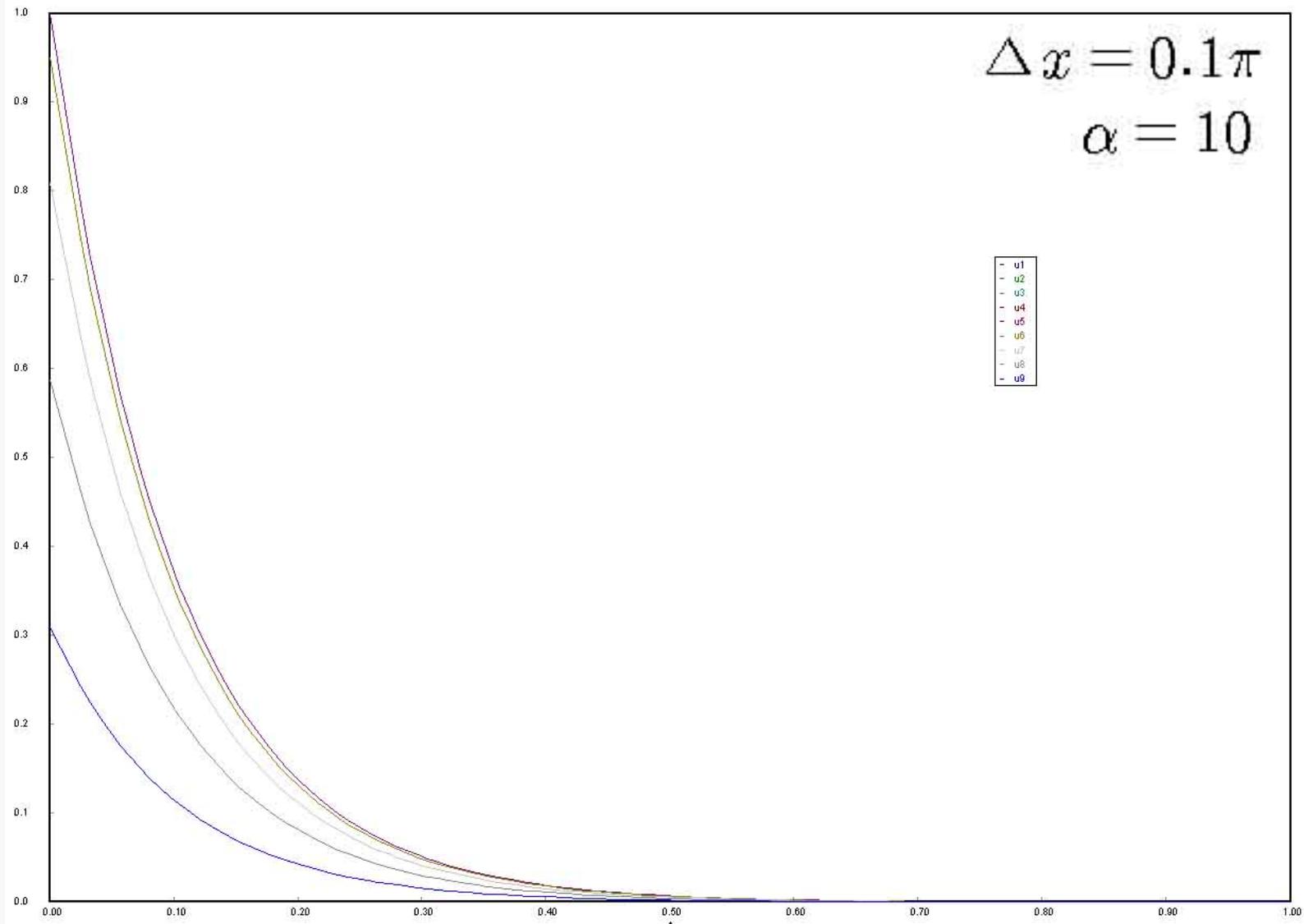
$\Delta x = 0.2\pi$ 일때의 입력데이터

```
d(u1)/d(t) = a * (u2 - 2 * u1 + u0) / deltax ^ 2
u1(0) = 0.587785252
d(u2)/d(t) = a * (u3 - 2 * u2 + u1) / deltax ^ 2
u2(0) = 0.951056516
d(u3)/d(t) = a * (u4 - 2 * u3 + u2) / deltax ^ 2
u3(0) = 0.951056516
d(u4)/d(t) = a * (u5 - 2 * u4 + u3) / deltax ^ 2
u4(0) = 0.587785252
a = 0.5
deltax = 0.2 * 3.141592654
u5 = 0
u0 = 0
t(0) = 0
t(f) = 1

z1 = sin(x1) * exp(-a * t)
x1 = 0.2 * 3.141592654
z2 = sin(x2) * exp(-a * t)
x2 = 0.4 * 3.141592654
z3 = sin(x3) * exp(-a * t)
x3 = 0.6 * 3.141592654
z4 = sin(x4) * exp(-a * t)
x4 = 0.8 * 3.141592654
```

Δx의 변화에 따른 u1,u2,u3,u4값 새로 정리

엑셀을 통한 초기값 입력

Δx의 변화에따른 x1,x2,x3,x4값 새로 지정해준 후 변수분리 된 정확해 입력

deltax=0.2*pi일 때				
	x값	x값	초기값	
	pi	3,141592654	sinx	
0.2	0.2*pi	0,628318531	0,587785252	u1일때의초기값
0.4	0.4*pi	1,256637061	0,951056516	u2일때의초기값
0.6	0.6*pi	1,884955592	0,951056516	u3일때의초기값
0.8	0.8*pi	2,513274123	0,587785252	u4일때의초기값

값 변화에 따른 그래프
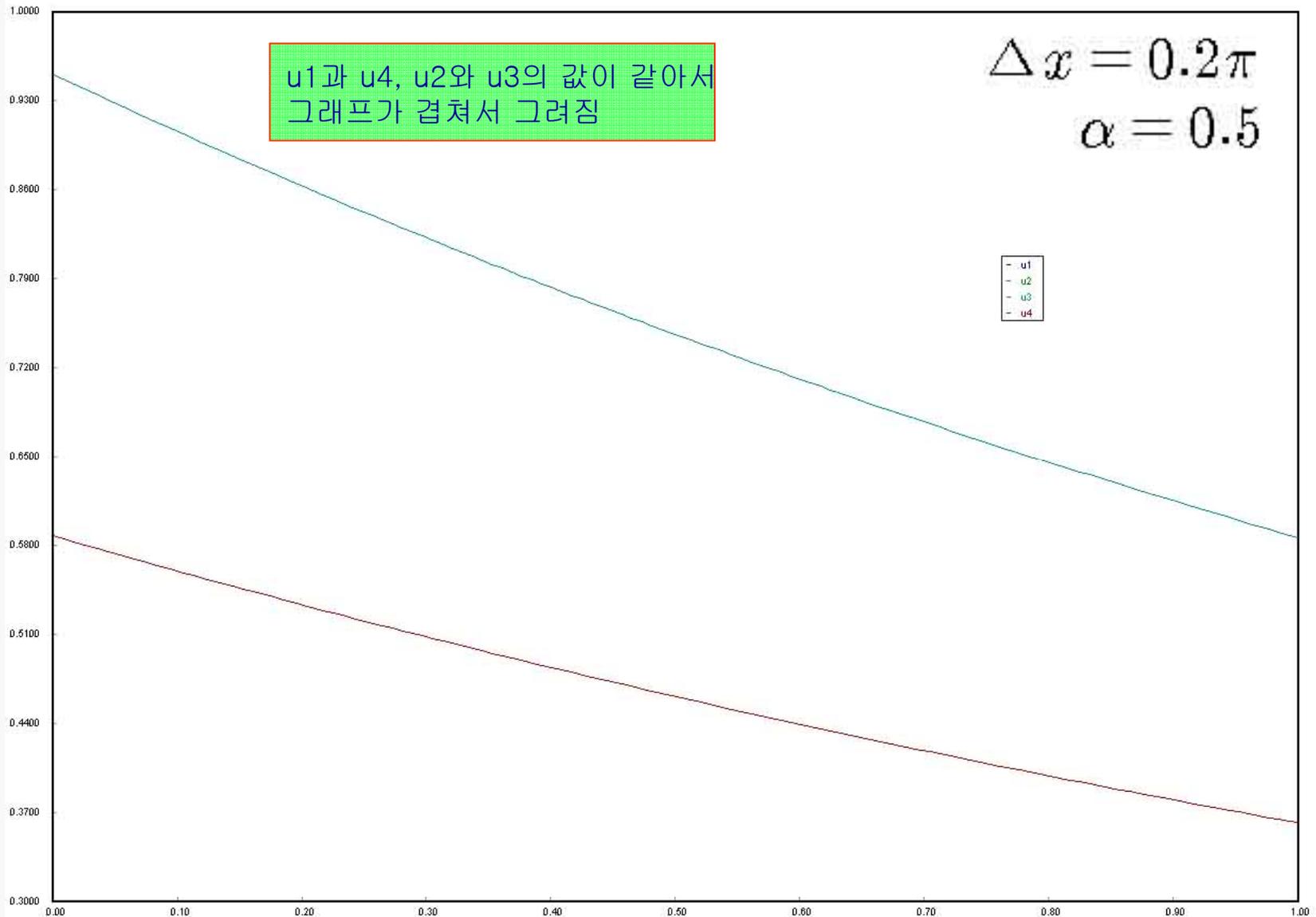
값 변화에 따른 그래프
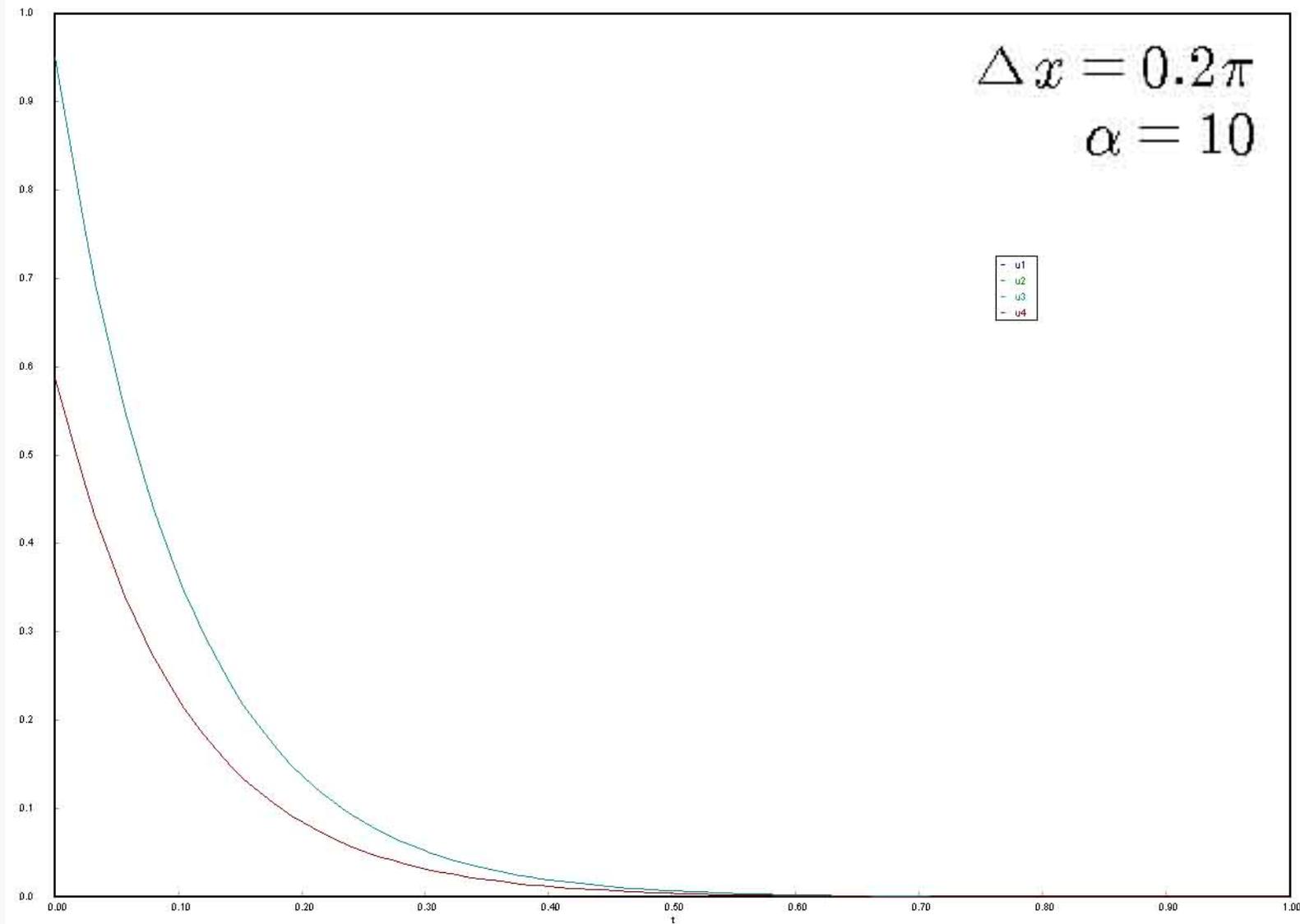
토론 및 검토

◈ Numerical solution과 Analytical solution 의 값이 거의 동일하게 나옴.

◈ U값은 가운데를 중심으로 대칭됨.

◈ Δx값을 작게 해주면 더 조밀한 간격의 u 값의 변화를 알 수 있음.

◈ α값의 변화에 따른 데이터 값은 α값이 클 수록 u값이 급격히 감소하는 경향을 보임.