사다리꼴 적분공식

trapezoidal rule

9849023
김 승 준

NEWTON-COTES 적분공식

f(x)가 적분하기 어려운 복잡한 함수일때

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_n(x)dx$$

여기서 $f_n(x)dx$는 다항식으로 다음과 같다

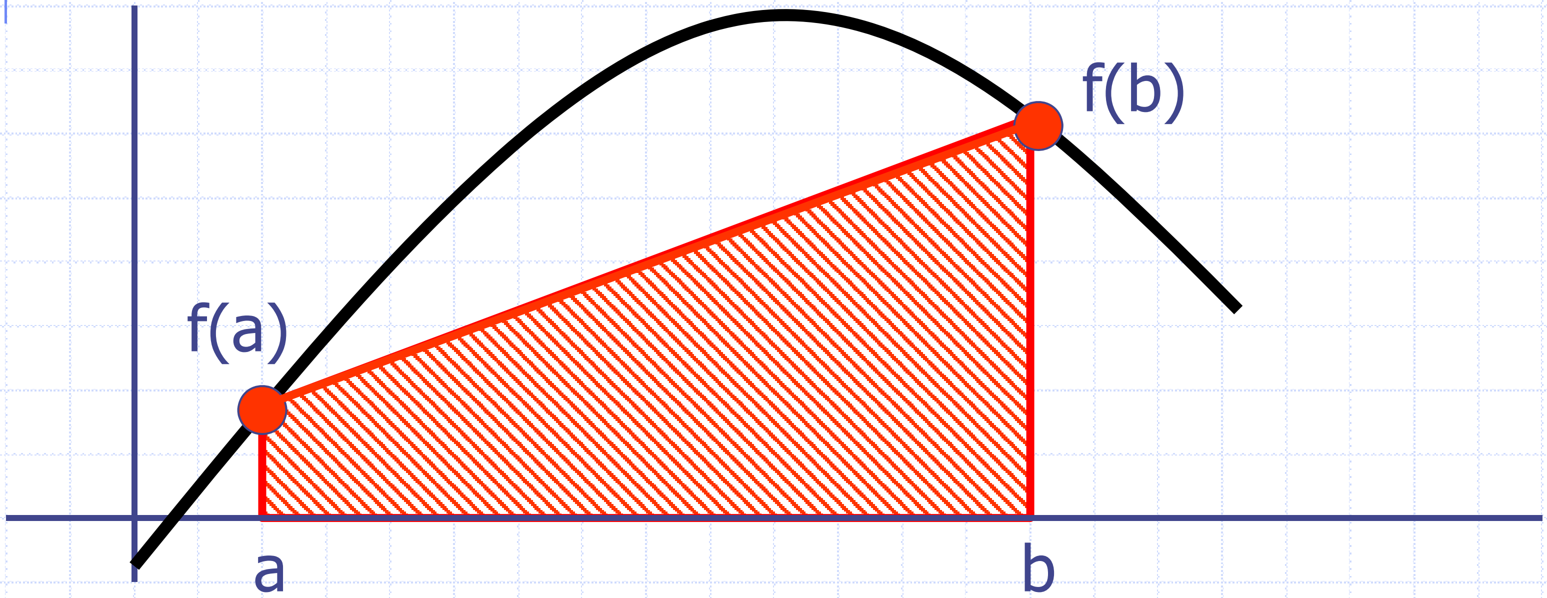
$$f_n(x)dx = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

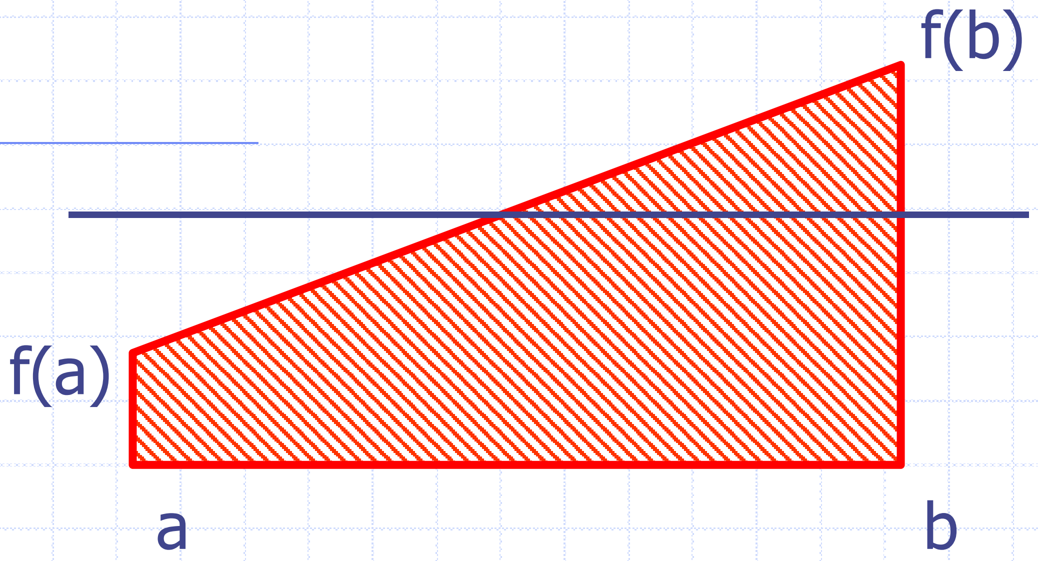
여기서 n은 다항식의 차수

사다리꼴 적분공식

$f_n(x)$가 1차 이면

$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-a)\,dx$$





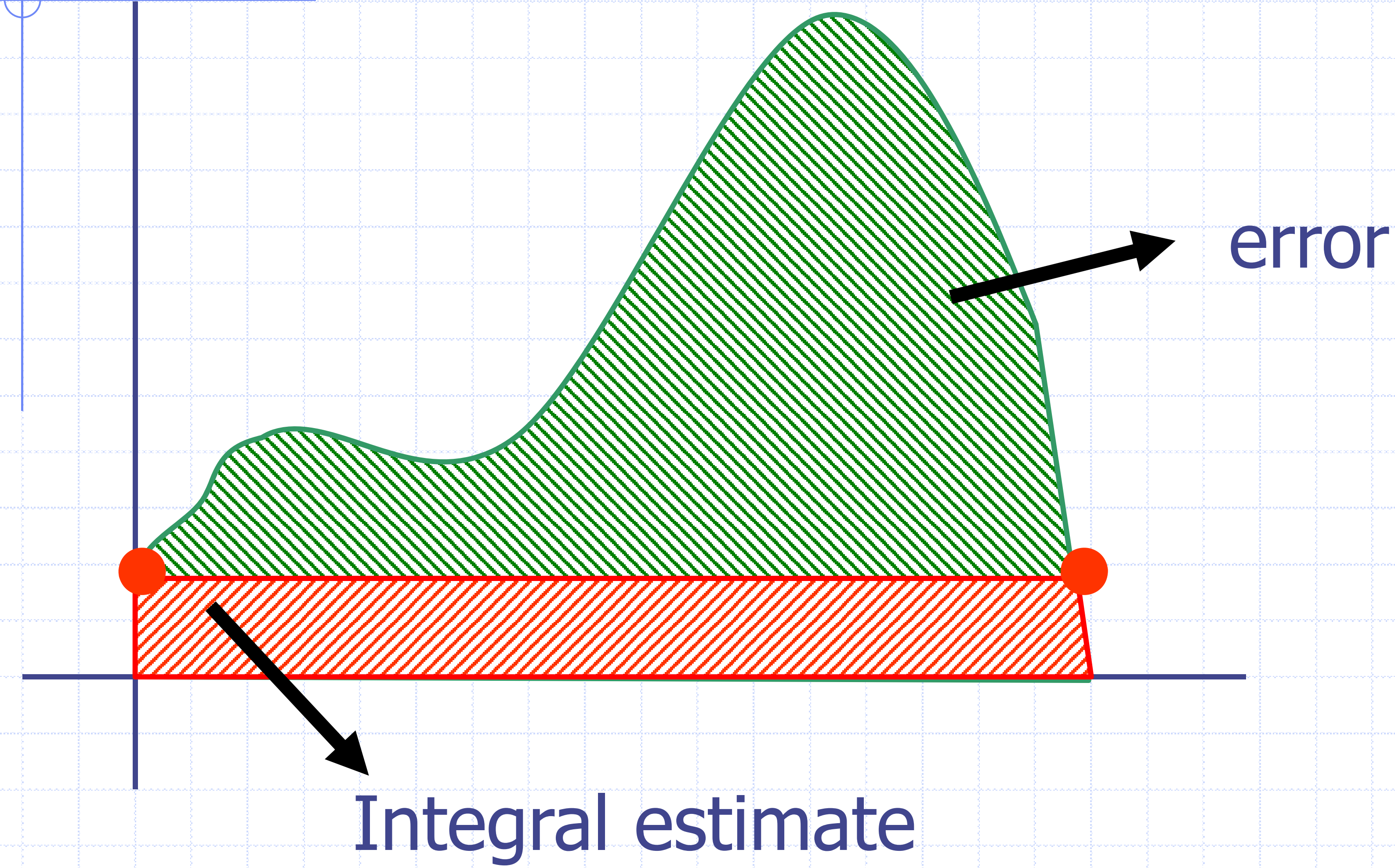
$$\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$I = \int_a^b f_1(x)dx$$ = 사다리꼴의 넓이

= 가로 x 평균높이 = $(b - a)\dfrac{f(a) + f(b)}{2}$

➡ 실제 적분결과와 같음

사다리꼴적분 공식의 오차



2점을 알고있을때

$(x_0, f(x_0))$ $(x_1, f(x_1))$

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

← 일차식

3점을 알고있을때

$(x_0, f(x_0))$ $(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

← 이차식

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = f[x_2, x_1, x_0]$$

NEWTON보간다항식의 일반적 형식

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots + b_n\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}_{\mathbf{n}\text{개}}$$

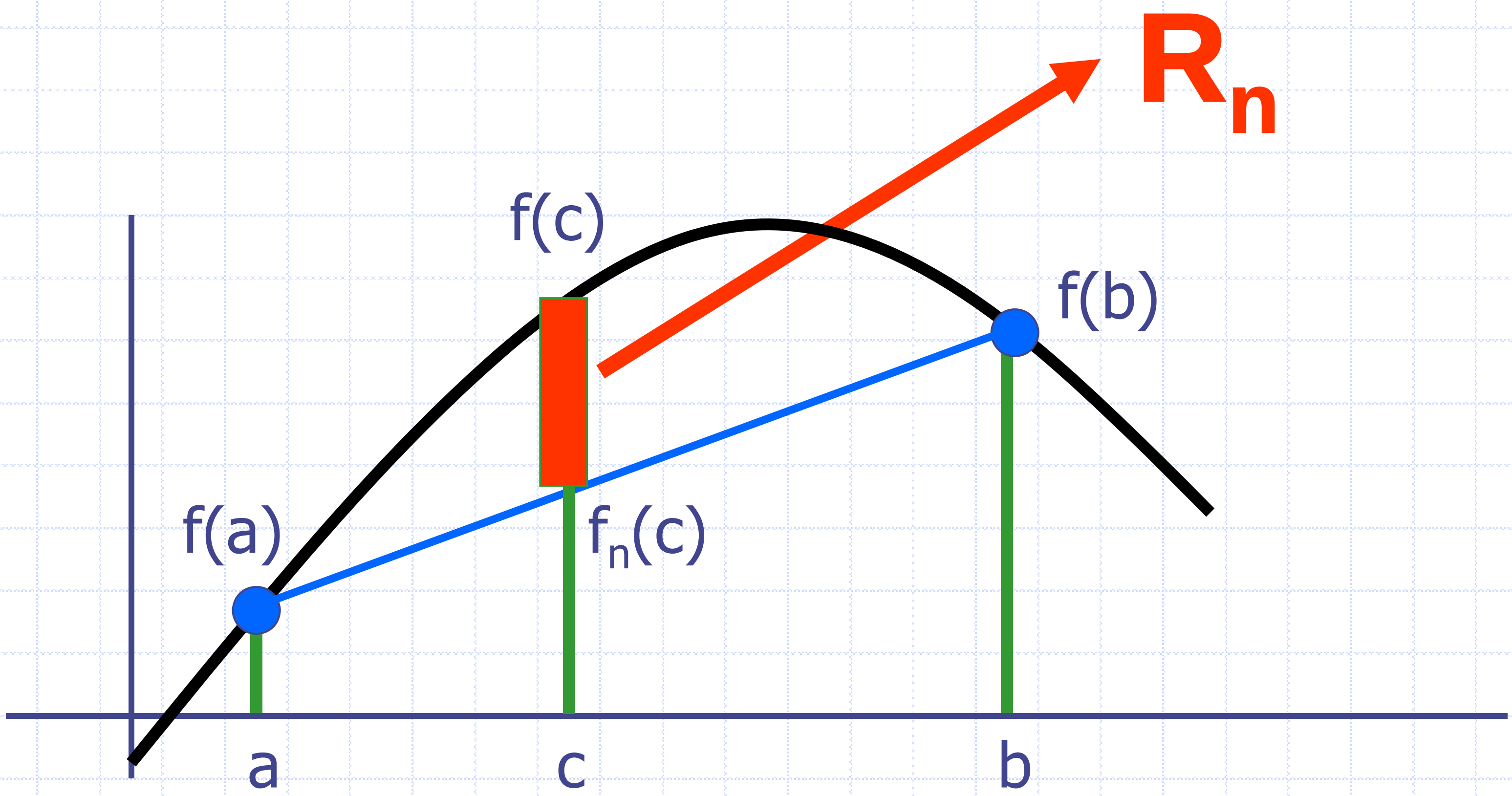
$b_0 = f(x_0)$

$b_1 = f[x_1, x_0]$

$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$

$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$

f(x)와 $f_n(x)$의 차이 보정



R_n을 구하기 위해 Taylor 급수를 생각하자

Taylor 급수는 다음과 같다.

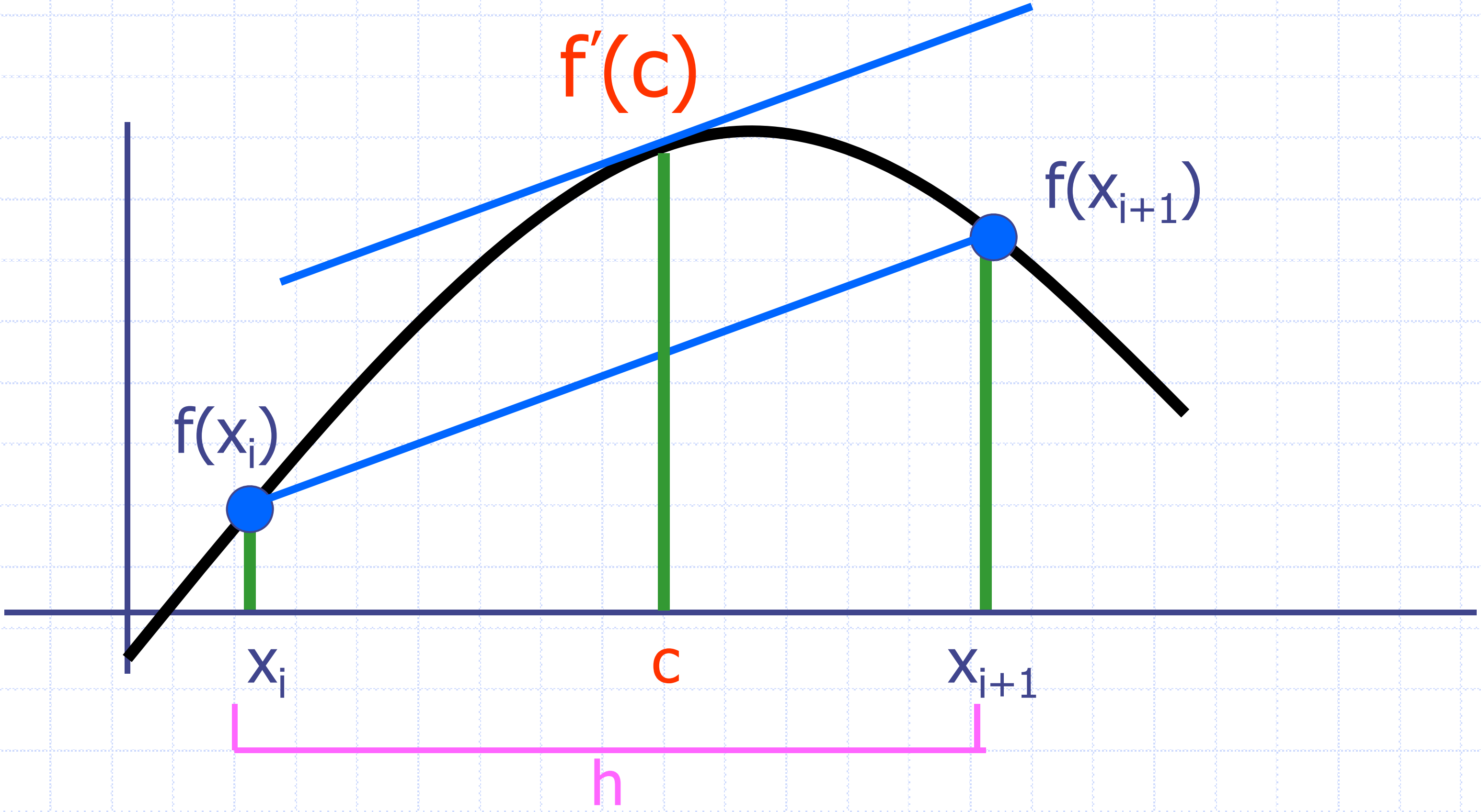
$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{n!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)h^n}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

➡ 여기서 **c** 는 무엇인가**?**

도함수의 평균값 정리

f(x)와 **f'(x)**가 $\mathbf{x_i}$와 $\mathbf{x_{i+1}}$사이에서 연속이면 $\mathbf{f(x_i)}$와 $\mathbf{f(x_{i+1})}$를 연결하는 직선에 평행인 기울기 **[f'(c)]**가 적어도 한 점 존재



R_n의 여러가지 표현

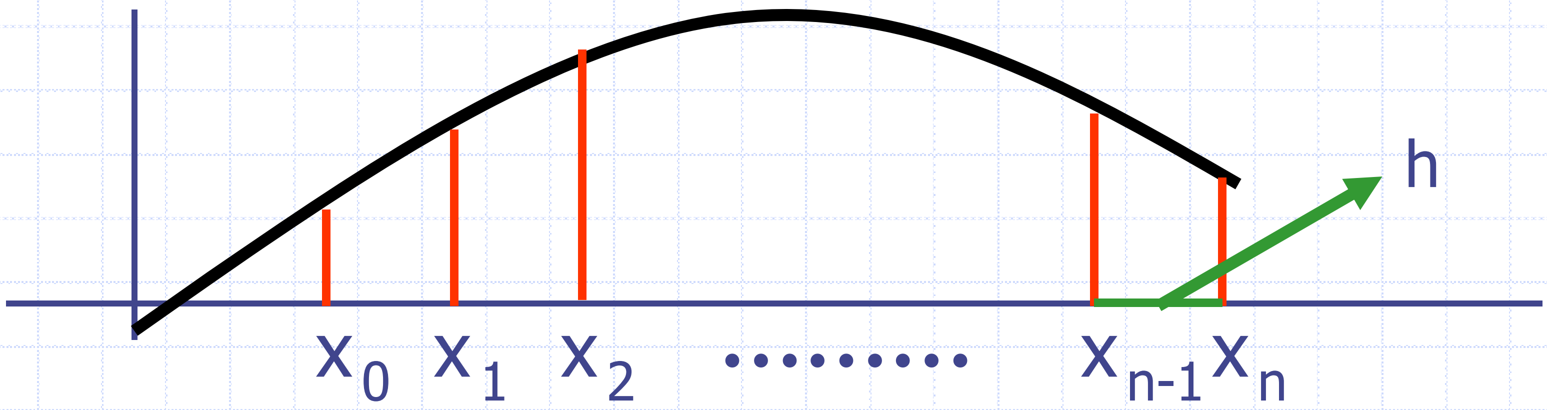
$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)(x_{i+1}-x_i)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!}$$

Newton-Gragory 전진공식

- 데이터가 같은 간격이고 올림차순일때



$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \cdots\cdots \quad x_n = x_0 + nh$$

$$f[x_2,x_1,x_0] = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$x_1-x_0=x_2-x_1=(x_2-x_0)/2=h$ 각각 대입

$$f[x_2,x_1,x_0]= \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h}$$

$f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0) = \triangle^2 f(x_0)$: 정의

$$f[x_2,x_1,x_0]= \frac{\triangle^2 f(x_0)}{2!h^2}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\triangle^n f(x_0)}{n!h^n}$$

NEWTON보간다항식의 일반적 형식

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots + b_n\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}_{n\text{개}}$$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$$ 윗 식에 각각 대입

$$f_n(x) = f_0(x) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_0-h) + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots[x-x_0-(n-1)h] + R_n$$

➡ **Newton-Gragory 전진공식**

$\alpha = \dfrac{x-x_0}{h}$ α를 새롭게 정의해서 윗식에 대입

$$f_n(x) = f_0(x) + \triangle f(x_0)\alpha + \frac{\triangle^2 f(x_0)}{2!}\alpha(\alpha-1) + \ldots$$

$$+ \frac{\triangle^n f(x_0)}{n!h^n}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)$$

$f_n(x)$ 가 **1**차식이면 **$f_1(x)$**는 다음과 같다

$$f_1(x) = f(a) + \triangle f(a)\alpha + \frac{f''(c)}{2}\alpha(\alpha - 1)h^2$$

사다리꼴 적분공식의 유도 및 오차추정

오차항을 포함한 **1**차 방정식에 대하여

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad = \int_a^b f_1(x)dx$$

$$= \int_a^b \left[f(a) + \triangle f(a)\alpha + \frac{f''(c)}{2}\alpha(\alpha - 1)h^2 \right] dx$$

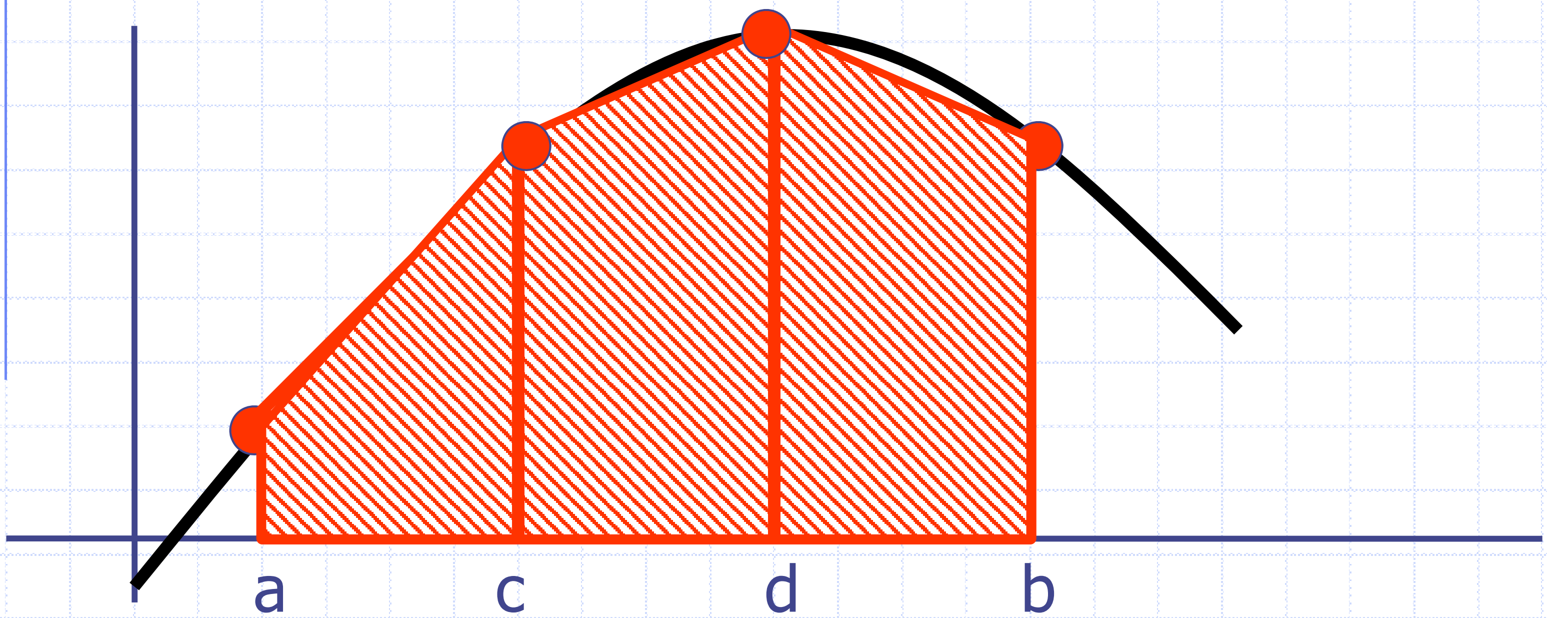
적분결과는 다음과 같다

$$I = h\frac{f(a)+\triangle f(b)}{2} - \frac{1}{12}f''(c)h^3$$

사다리꼴 적분공식 오차

Trapezoidal rule **Truncation error**

합성사다리꼴 적분공식



구간이 세개일때

간격의 크기가 같은 **(n+1)**개의 점들이 있다고 하면

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots\ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

사다리꼴 적분공식에 대입

$$I = h\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$$+ \ldots\ldots + h\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

항들을 묶어서 나타내면

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$ 라고 하면

$$I = \boxed{(b-a)}\,\boxed{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}$$

넓이 평균 높이

합성 사다리꼴 적분공식