연속치환법 (Successive substitution)

화공생명공학과
2001170306 정강민

연속치환법이란?

- 비선형 방정식 풀이법의 일종
  ($ax^2 = by+c$, $x-\ln x+b = 0$, $ax+by = cxy$,…)
- 반복식 $x_{i+1} = g(x_i)$ 을 이용하여 근을 구하는 방법
- 단일점 반복법(Simple one-point iteration),
  고정점 반복법(Fixed point iteration) 으로도 불림

연속치환법의 특징

- 한 개의 임의의 초기값에서 시작
- 계산이 진행됨에 따라 발산하거나 근에서 멀어지는 경우도 존재.
  그러한 경우를 제외하고는 모든 경우에 근을 구할 수 있다.
- 고정점($x = g(x)$ 의 근) 이용

연속치환법 사용방법

1. 함수 $f(x) = 0$ 을 $x = g(x)$ 꼴로 재배열
2. 초기 가정값 x_i 를 결정
3. x_i 를 통해 새로운 추정값 x_{i+1} 계산
4. 이를 반복하여 방정식의 근을 계산

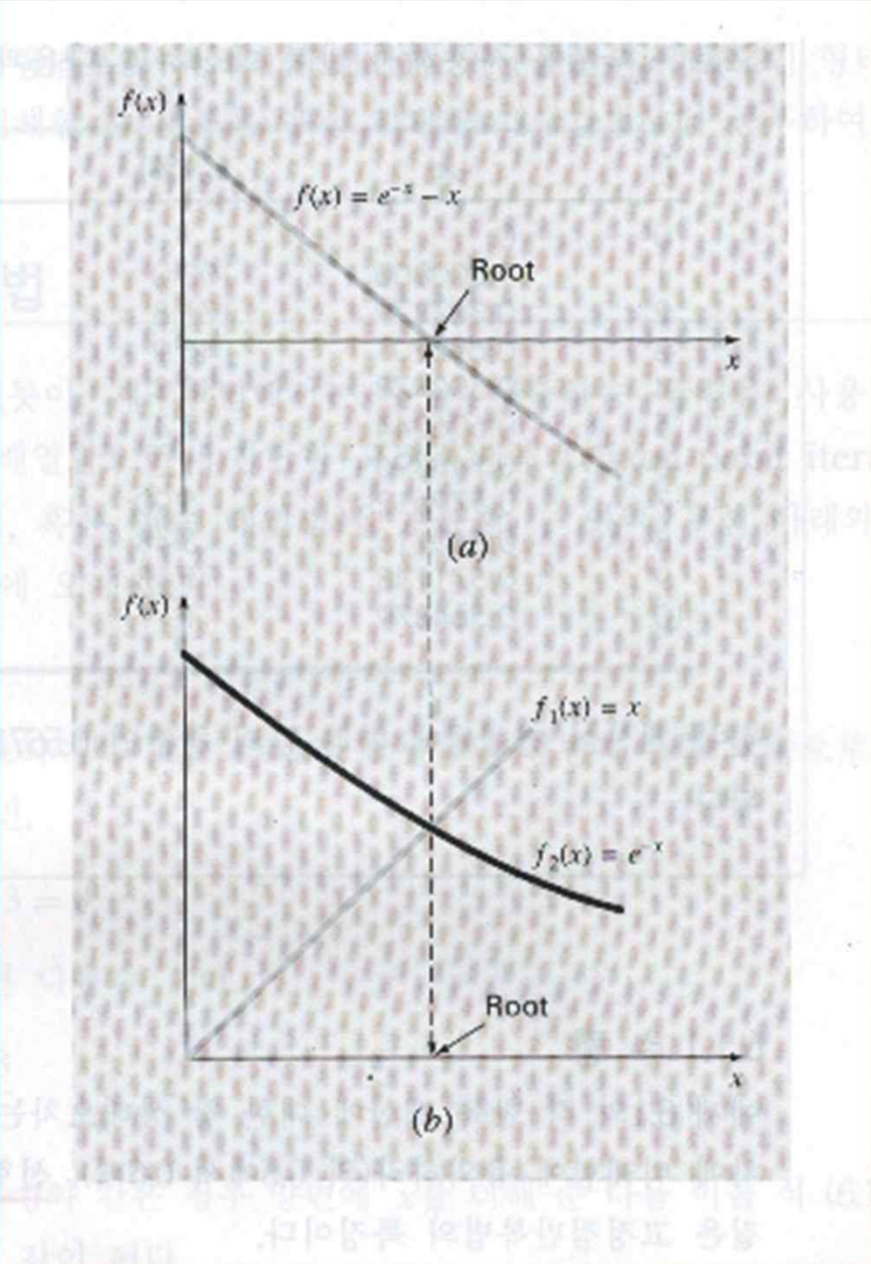
<예제> 연속치환법을 사용해서 $f(x) = e^{-x} - x$ 의 근을 구하라.

$f(x)$ 를 $x=e^{-x}$ 형태로 변환

$x_{i+1}= e^{-x}$ 로 나타낸 후, 초기 가정값으로 $x_0=0$ 을 사용하여 반복 계산

∴ 근의 참값인 0.56714329 에 가까운 추정값을 얻을 수 있다.

회수	x_i	오차(%)
0	0	
1	1.000000	100.0
2	0.367879	171.8
3	0.692201	46.9
4	0.500473	38.3
5	0.606244	17.4
6	0.545396	11.2
7	0.579612	5.90
8	0.560115	3.48
9	0.571143	1.93
10	0.564879	1.11

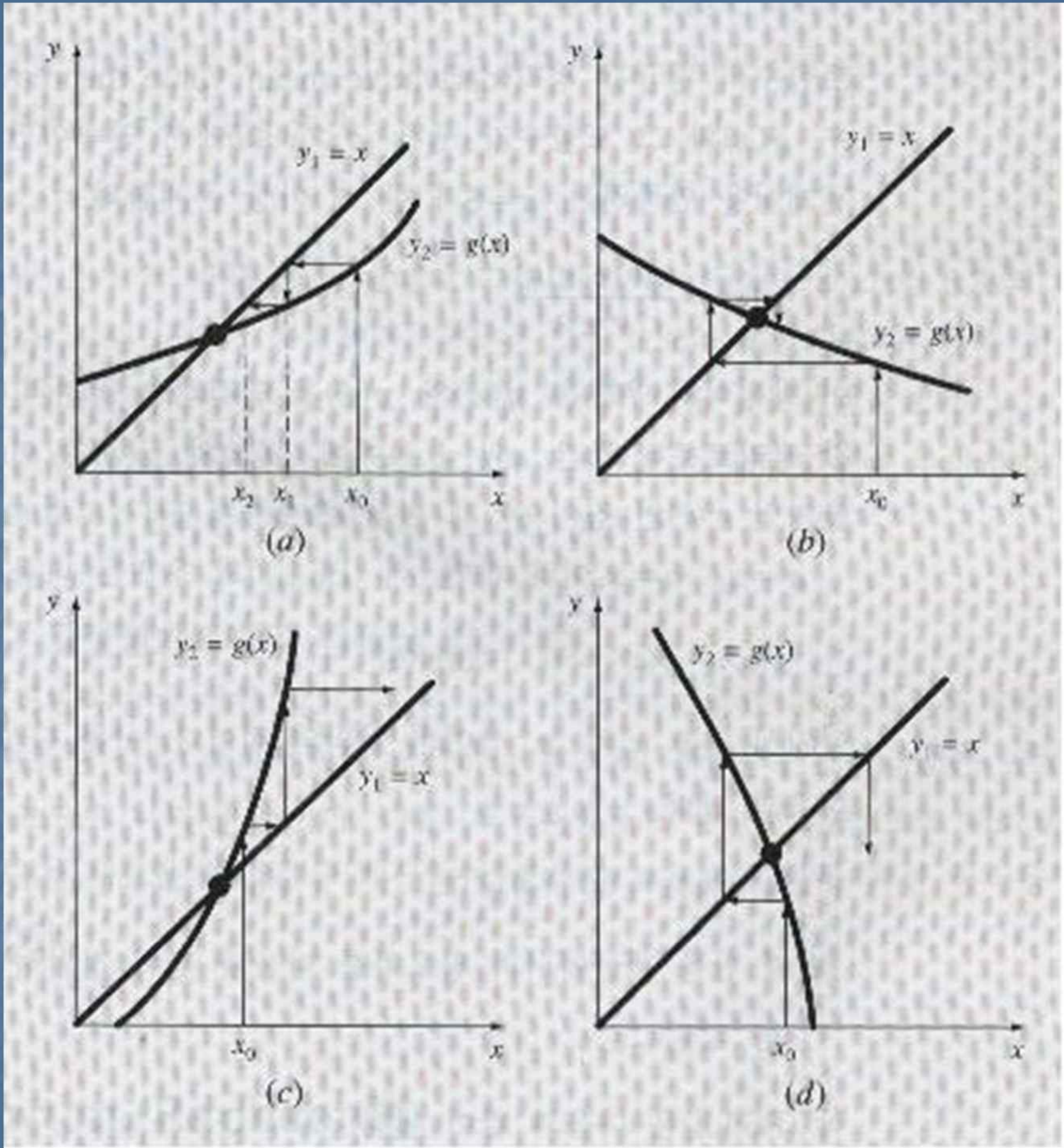


$f(x) = e^{-x} - x$

$f_1(x) = f_2(x)$

$y_1 = f_1(x)$
$y_2 = f_2(x)$

교차점의 x 좌표는
$f(x)=0$ 의 근



* 구간내에서 수렴하기 위한 조건?

$|g'(x)| < 1$

<증명>

$x_{i+1} = g(x_i)$

$x_r = g(x_r)$

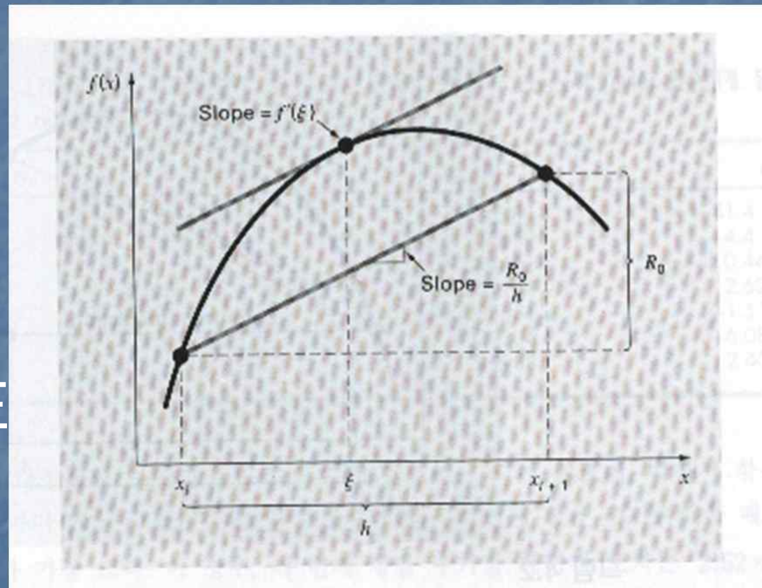
$x_r - x_{i+1} = g(x_r) - g(x_i)$

$g'(\xi) = \{g(b)-g(a)\} / (b-a)$ (← 평균값 정리)

$g(x_r) - g(x_i) = (x_r - x_i)\, g'(\xi)$

$x_r - x_{i+1} = (x_r - x_i)\, g'(\xi)$

$E_i = x_r - x_i$ 라고 할때, $E_{i+1} = g'(\xi)E$



∴ $|\,g'(\xi)\,| < 1$, 수렴

```
      real x, f, gap, error
      x = 0.0
      iter = 1
      error = 0.00001
100   f = exp(-x)
      gap = abs(x-f)
      print *, 'iter:',iter, '  x:', x
      if(gap.lt.error) then
      print *, 'root:', x
      stop

      else
      x = f
      iter = iter+1
      goto 100
      endif

      stop
      end
```

```
iter:           2  x:     1.000000
iter:           3  x:   3.678795E-01
iter:           4  x:   6.922006E-01
```