Chap 4. 열 발생이 없는 정상상태 열전도

4-1. 단일층

온도 분포의 지배 방정식 : 열전도도를 상수라 가정하면

$$\frac{d}{dX}\left[X^n \frac{dT}{dX}\right] = 0$$

위의 방정식을 풀어서 온도 분포를 얻고, 다음과 같은 Fourier 법칙을 이용하면 정상상태 열전달 속도를 쉽게 구할 수 있다.

$$q = \frac{Q}{A} = -k\frac{dT}{dX}$$

1. 평면벽

그림 4.2의 경우에 온도 분포는 다음 식들을 풀어서 구할 수 있다.

지배 방정식

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

경계조건

$$T = T_1 \quad \text{at} \quad x = 0$$

$$T = T_2 \quad \text{at} \quad x = L$$

온도 분포

$$T = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$$

열속

Fourier 법칙으로부터

$$q = -k\frac{dT}{dx} = k\frac{(T_1 - T_2)}{L}$$

열전달 속도

$$Q = Aq = kA\frac{(T_1 - T_2)}{L}$$

위의 식을 전기회로에서의 ohm’s law 형태로 쓰면

$$\text{Current}(I) = \frac{\text{Driving Force}(V)}{\text{Resistance}(R)}$$: Ohm's Law

$$\text{Heat Transfer Rate}(Q) = \frac{\text{Driving Force}(\Delta T)}{\text{Heat Transfer Resistance}(R)}$$

열전달 저항은

$R = \dfrac{L}{Ak}$ 가 된다.

2. 평판벽, 한쪽은 온도가 고정되고, 한쪽은 대류가 존재하는 경우 (그림 4.3)

이 문제는 다음과 같은 지배 방정식 및 경계조건으로 정의된다.

지배 방정식

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

경계조건

$T = T_1$ at $x = 0$

$-k\dfrac{dT}{dx} = h_{2,\infty}\left(T - T_{2,\infty}\right)$ at $x = L$

온도 분포를 원하면 위의 미분 방정식을 풀어서 구할 수 있다.

만약 열전달 속도만을 구하고자 한다면 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

정상상태 이므로

전도에 의한 열전달 속도 = 대류에 의한 열전달 속도 $=Q$라 둘 수 있다. 그러면

$Q = kA\dfrac{(T_1 - T_2)}{L}$: 전도에 의한 열전달 속도(여기서 아직 T_2는 모름) (a)

$Q = h_{\infty 2}A\left(T_2 - T_{\infty 2}\right)$: 대류에 의한 열전달 속도(마찬가지로 아직 T_2는 모름) (b)

위의 두식을 다음과 같이 변형하자.

$$\frac{QL}{kA} = T_1 - T_2$$

$$\frac{Q}{h_{\infty 2}A} = T_2 - T_{\infty 2}$$

위의 두식을 더하면

$$Q\left(\frac{L}{kA}+\frac{1}{h_{\infty 2}A}\right)=T_1-T_{\infty 2}$$

$$Q=\frac{T_1-T_{\infty 2}}{\left(\frac{L}{kA}+\frac{1}{h_{\infty 2}A}\right)}$$

만약 T_2 를 구하고 싶으면 이 식을 위의 식 (a)나 (b)에 대입하여 정리하면 됨.
위의 식은 다음과 같이 해석할 수도 있다. 앞에서 구한 바와 같이 전도에 의한 저항은 $R_{slab}=\frac{L}{Ak}$, 대류에 의한 저항은 $R_{\infty 2}=\frac{1}{Ah_{\infty 2}}$ 이라 두면, 전체 Driving Force는 전체 온도차 $T_1-T_{\infty 2}$ 가 되고, 저항 R_{slab} 과 $R_{\infty 2}$ 이 직렬 연결된 것으로 볼 수 있다.

3. 평면벽, 양 경계면에 대류가 있는 경우(그림 4-4의 경우).
지배 방정식

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0$$

경계조건

$$-k\frac{dT}{dx}=h_{1\infty}\left(T_{\infty 1}-T\right) \qquad \text{at} \quad x=0$$

$$-k\frac{dT}{dx}=h_{2\infty}\left(T-T_{2,\infty}\right) \qquad \text{at} \quad x=L$$

온도 분포를 원하면 위의 미분 방정식을 풀어서 구할 수 있다.
만약 열전달 속도만을 구하고자 한다면 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.
정상상태 이므로
왼쪽 면에서 대류에 의한 열전달 속도 = 전도에 의한 열전달 속도 = 오른쪽 면에서 대류에 의한 열전달 속도 $=$ Q라 둘 수 있다. 그러면

$Q=h_{\infty 1}A\left(T_{\infty 1}-T_1\right)$: 왼쪽 면에서 대류에 의한 열전달 속도(아직 T_1 는 모름) (c)

$Q=kA\frac{\left(T_1-T_2\right)}{L}$: 전도에 의한 열전달 속도(아직 T_1, T_2 는 모름) (d)

$Q=h_{\infty 2}A\left(T_2-T_{\infty 2}\right)$: 오른쪽 면에서 대류에 의한 열전달 속도(아직 T_2 는 모름) (e)

위의 세식을 다음과 같이 변형하자.

$$\frac{Q}{h_{\infty 1}A} = T_{\infty 1} - T_1$$

$$\frac{QL}{kA} = T_1 - T_2$$

$$\frac{Q}{h_{\infty 2}A} = T_2 - T_{\infty 2}$$

위의 세식을 더하면

$$Q\left(\frac{1}{h_{\infty 1}A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_{\infty 2}A}\right) = T_{1\infty} - T_{\infty 2}$$

$$Q = \frac{T_{1\infty} - T_{\infty 2}}{\left(\frac{1}{h_{\infty 1}A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_{\infty 2}A}\right)}$$

만약 T_1, T_2를 구하고 싶으면 이 식을 위의 식 (c)나 (e)에 대입하여 정리하면 됨. (예제 4-2 참고)

해석 결과로부터 다음과 같이 생각할 수 있다. 왼쪽면에서의 대류에 의한 저항은 $R_{\infty 1} = \frac{1}{Ah_{\infty 1}}$, 전도에 의한 저항은 $R_{slab} = \frac{L}{Ak}$, 오른쪽 면에서 대류에 의한 저항은 $R_{\infty 2} = \frac{1}{Ah_{\infty 2}}$ 이 된다. 따라서 세 저항이 직렬 연결된 형태로 생각할 수 있다.

$$Q = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{\infty 1} + R_{slab} + R_{\infty 2}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{1/h_{\infty 1}A + L/kA + 1/h_{\infty 2}A}$$

4. 속이 빈 긴 원통

그림 4-5와 같은 경우에, 온도 분포는 다음 식들을 풀어서 구할 수 있다.

지배 방정식

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

경계조건

$T = T_1$ at $r = a$

$T = T_2$ at $r = b$

위의 식을 풀면 다음과 같이 온도 분포를 얻을 수 있다.

$$T = T_1 + \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}(T_2 - T_1)$$

열속

Fourier 법칙에 의하면

$$q = -k\frac{dT}{dr} = -\frac{k}{r}\frac{(T_2 - T_1)}{\ln(b/a)}$$

열전달 속도

$$Q = qA = (2\pi rH)\left[-\frac{k}{r}\frac{(T_2 - T_1)}{\ln(b/a)}\right] = \frac{2\pi kH}{\ln(b/a)}(T_2 - T_1)$$

여기서

$$\frac{2\pi H}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi H(b-a)}{\ln(b/a)}\frac{1}{(b-a)} = \frac{A_b - A_a}{\ln(A_b/A_a)}\frac{1}{\Delta r} = A_{lm}\frac{1}{\Delta r}$$

따라서

$$Q = kA_{lm}\frac{(T_2 - T_1)}{\Delta r}$$

위의 평판의 경우와 비교하면, 면적이 두 면적의 log평균으로 바뀌었을 뿐이다. 따라서 원통에서, 전도에 의한 열전달 저항은

$R_{cyl} = \dfrac{\Delta r}{kA_{lm}}$ 이 된다.

(예제 4.3)

(예제 4.4)

안쪽 표면의 온도가 주어지는 대신 안쪽 표면에서의 열속이 주어져 있으므로,

$$Q = A_a q_a$$

전도에 의한 열전달 속도는

$$Q = kA_{lm}\frac{(T_2 - T_1)}{\Delta r}$$

이 두식을 같게 두고, 문제에 주어진 조건들을 대입하면 쉽게 풀린다.

(ex) 안쪽 반지름과 바깥쪽 반지름이 각각 a와 b인 속이 빈 원통에서 각 표면의 온도는 T_1 과 T_2 이다. 열전도가 다음과 같이 온도에 따라 선형으로 변할 때

$$k = k_0(1 + \beta T)$$

반지름 방향으로의 정상상태 열전달 속도를 구하라.

(풀이) Fourier 법칙에 의하여

$$Q = -k(2\pi rL)\frac{dT}{dr}$$

위의 열전도도를 대입하면

$$Q = -k_0(1+\beta T)(2\pi rL)\frac{dT}{dr}$$

변수 분리하고 적분하면

$$\frac{Q}{2\pi rL}dr = -k_0(1+\beta T)dT$$

$$\frac{Q}{2\pi L}\int_a^b \frac{dr}{r} = -k_0\int_{T_1}^{T_2} 1+\beta T dT$$

정리하면

$$Q = \frac{2\pi L k_0}{\ln(b/a)}\left[(T_1 - T_2) + \frac{\beta}{2}(T_1^2 - T_2^2)\right]$$

$$Q = \frac{2\pi L k_0}{\ln(b/a)}\left[1 + \frac{\beta}{2}(T_1 + T_2)\right](T_1 - T_2)$$

$k_{avg} = k_0\left(1 + \frac{\beta}{2}(T_1 + T_2)\right)$이라 두면

$Q = k_{avg}A_{gm}\frac{\Delta T}{\Delta r}$: <u>이관계는 항상 성립하는 것은 아니다.</u>

5. 속이 빈 원통, 양쪽 면에서 대류가 있는 경우 (그림 4.6).

위의 평판의 경우와 같다. 다만 전도에 의한 저항이 원통에서의 저항으로 바뀔 뿐이다.

$$Q = h_{\infty 1}A_a(T_{\infty 1} - T_1)$$

$$Q = kA_{lm}\frac{(T_1 - T_2)}{\Delta r}$$

$$Q = h_{\infty 2}A_b(T_2 - T_{\infty 2})$$

$$Q = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{\infty 1} + R_{cyl} + R_{\infty 2}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{1/h_{\infty 1}A_a + \Delta r/kA_{lm} + 1/h_{\infty 2}A_b}$$

(예제 4-5) 이 문제에서는 내부 대류에 의한 열전달 저항이 존재하지 않으므로

$$Q = \frac{T_1 - T_{\infty 2}}{R_{cyl} + R_{\infty 2}} = \frac{T_1 - T_{\infty 2}}{\Delta r/kA_{lm} + 1/h_{\infty 2}A_b}$$

식을 이용할 수 있다.

6. 속이 빈 구

그림 4-7과 같은 경우에, 온도 분포는 다음 식들을 풀어서 구할 수 있다.

지배 방정식

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0$$

경계조건

$T=T_1 \quad \text{at} \quad r=a$

$T=T_2 \quad \text{at} \quad r=b$

위의 식을 풀면 다음과 같이 온도 분포를 얻을 수 있다.

$$T=\frac{a}{r}\left(\frac{b-r}{b-a}\right)T_1+\frac{b}{r}\left(\frac{r-a}{b-a}\right)T_2$$

열속

Fourier 법칙에 의하면

$$q=-k\frac{dT}{dr}=\frac{k}{r^2}\frac{ab}{b-a}(T_2-T_1)$$

열전달 속도

$$Q=qA=(4\pi r^2)\left[\frac{k}{r^2}ab\frac{(T_2-T_1)}{b-a}\right]=k4\pi ab\frac{(T_2-T_1)}{b-a}$$

여기서

$$4\pi ab=\sqrt{4\pi a^2}\sqrt{4\pi b^2}=\sqrt{A_aA_b}=A_{gm}$$

따라서

$$Q=kA_{gm}\frac{(T_2-T_1)}{\Delta r}$$

위의 평판의 경우와 비교하면, 면적이 두 면적의 기하 평균으로 바뀌었을 뿐이다. 따라서 구에서, 전도에 의한 열전달 저항은

$R_{sph}=\dfrac{\Delta r}{kA_{gm}}$ 이 된다.

(예제 4.6)

7. 속이 빈 원통, 외부 경계면에서 대류가 있는 경우 (그림 4.8).
위의 평판의 경우와 같다. 다만 전도에 의한 저항이 구에서의 저항으로 바뀔 뿐이다.

$$Q = kA_{gm}\frac{(T_1 - T_2)}{\Delta r}$$

$$Q = h_{\infty 2}A_b(T_2 - T_{\infty 2})$$

$$Q = \frac{T_1 - T_{\infty 2}}{R_{sph} + R_{\infty 2}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\Delta r/kA_{lm} + 1/h_{\infty 2}A_b}$$

(예제 4-7)

4-2. 다중층

1. 다중 평면벽 (그림 4 -9)
다중층의 경우에는 전도에 의한 저항이 여러 개 존재하는 것으로 생각할 수 있다.
왼쪽 면에서의 대류 열전달 저항: $R_{\infty 1} = \frac{1}{Ah_{\infty 1}}$

1번 평판 벽에서의 전도 열전달 저항 : $R_1 = \frac{L_1}{Ak_1}$

2번 평판 벽에서의 전도 열전달 저항 : $R_2 = \frac{L_2}{Ak_2}$

3번 평판 벽에서의 전도 열전달 저항 : $R_3 = \frac{L_3}{Ak_3}$

오른쪽 면에서의 대류 열전달 저항: $R_{\infty 2} = \frac{1}{Ah_{\infty 2}}$

위의 저항들이 직렬 연결된 형태이므로 전체 저항 : $R_T = \sum R_i$

(예제 4-8)
(예제 4-9)

2. 다중층 속이 빈 원통(그림 4-10)
앞의 다중 평판과 비슷하나, 원통에서의 전도 열전달 저항을 구할 때 면적이 log 평균 면적이 됨에 주의

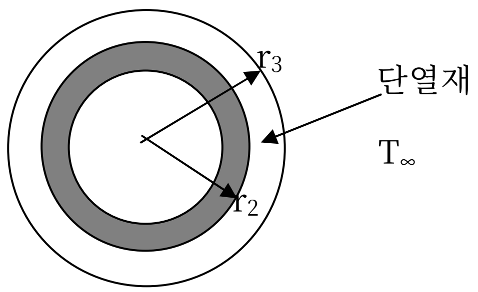
(예제 4-10)

(예제 4-11)

(ex) 바깥 반지름이 r_2 인 수증기용 관이 바깥 반지름이 r_3 인 단열재에 둘러싸여 있다. 관 외면의 온도 T_2 와 외기의 온도 T_∞ 는 일정하다. 단열재 외면에서의 단위 면적당 열 손실은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{q}{A} = h(T_3 - T_\infty)$$

이 경우 단열재의 두께에 따른 열전달 속도의 변화를 구하여라.



단열재를 통한 열전달 속도는

$$Q = \frac{T_2 - T_\infty}{R_{cyl} + R_\infty}$$

$$R_{cyl} = \frac{\Delta r}{kA_{lm}} = \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi kL}$$

$$R_\infty = \frac{1}{hA} = \frac{1}{h2\pi r_3 L}$$

따라서

$$Q = \frac{2\pi L(T_2 - T_\infty)}{\ln(r_3/r_2)/k + 1/hr_3}$$

Q는 r_3 의 함수가 된다. 단열재의 두께가 증가할수록 열전달 속도는 줄어들 것으로 예측된다. 따라서 Q가 r_3 에 대한 단조 감소 함수일 것으로 예측되고, 이렇게 될 경우에는 dQ/dr_3 가 항상 음이 될 것이다. 따라서 dQ/dr_3 의 부호를 한번 따져 보자.

$$\frac{dQ}{dr_3}=\frac{2\pi L(T_2-T_\infty)\left(\frac{1}{kr_3}-\frac{1}{hr_3^2}\right)}{\frac{1}{k}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)+\frac{1}{hr_3}}$$

위의 식은

$\frac{1}{kr_3}-\frac{1}{hr_3^2}=0$ 일때 $\frac{dQ}{dr_3}=0$ 이 되므로 Q는 r_3 에 대한 단조 감소 함수가 아니고 처음에는 증가하다가 나중에는 감소하는 형태가 된다. 따라서 열전달 속도가 최대가 될 조건은 $\frac{dQ}{dr_3}=0$ 일때, 즉 $r_3=\frac{k}{h}$ 일 경우이다. 즉 $r_3<\frac{k}{h}$ 인 영역에서는 단열재를 두껍게 할수록 열전달 속도는 증가하는 현상이 생기다. 하지만 실제의 경우 이 두께는 그리 크지 않다.

3. 다중층 속이 빈 구

앞의 다중 평판과 비슷하나, 원통에서의 전도 열전달 저항을 구할 때 면적이 기하 평균 면적이 됨에 주의

4. 총괄 열전달 계수

$Q=(UA)\Delta T$ 로 두고 U를 총괄 열전달 계수라 한다. 위에서 공부해온 열전달 저항과 총괄 열전달 계수와의 상관관계는

$$Q=(UA)\Delta T=\frac{\Delta T}{R_T}$$

따라서

$$(UA)=\frac{1}{R_T}$$

원통이나 구의 경우 열전달 면적은 열전달 방향으로 변한다. 따라서 어떤 면적을 기준으로 할 것인가에 따라 총괄 열전달 계수의 값이 바뀌게 된다. 하지만 총괄 열전달 계수와 기준의 되는 열전달 면적의 곱은 항상 일정하다.

$$\frac{1}{R_T}=U_aA_a=U_bA_b$$

(예제 4-12)

4-3 열접촉 저항

열적으로 완벽한 접촉이 이루어지지 않는 경우, 접촉의 불완전성에 기인한 열전달 저항이

생길 수 있다.

4.4 열전도 형상 계수

전도에 의한 열전달 속도를

$$Q = kS\Delta T$$

로 표시할 수 있을 때, S를 열전도 형상 계수라 한다.

열전달 저항과의 관계

$$Q = kS\Delta T = \frac{\Delta T}{R}$$

따라서

$$kS = \frac{1}{R}$$

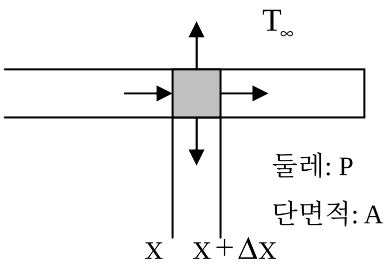
평판의 경우에는

$$R = \frac{L}{kA},\ \text{따라서}\ S = \frac{A}{L}$$

여러 기하학적 형태에 따른 열전도 형상 계수가 표 4.1에 요약되어 있다.

4-5. Fin

균일한 단면을 갖는 Fin



Input : x=x에서의 단면적 A를 통한 전도 $(qA)|_x$

Output : x= $x+\Delta x$에서의 단면적 A를 통한 전도 $(qA)|_{x+\Delta x}$

x=x에서 : x= $x+\Delta x$ 사이의 표면(S)을 통한 대류 : $Sh(T-T_\infty) = P\Delta xh(T-T_\infty)$

정상상태이므로 Input=Output

$$(qA)|_x = (qA)|_{x+\Delta x} + P\Delta xh(T-T_\infty)$$

양변을 Δx로 나누고 Δx를 0으로 보내는 극한을 취하면

$$-\frac{d}{dx}(qA) = Ph(T-T_\infty)$$

Fourier의 법칙을 적용하면

$$-\frac{d}{dx}\left(-kA\frac{dT}{dx}\right)=Ph(T-T_\infty)$$

Fin의 열전도도 k와 단면적 A가 일정하다고 하면

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{hP}{kA}(T-T_\infty)=0$$

$\theta=(T-T_\infty)$, $m^2=\frac{hP}{kA}$ 라 두면

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$$

위와 같은 형태의 상미분 방정식을 풀 때, 일반해로 $\theta=C_1\exp(mx)+C_2\exp(-mx)$로 둘 수도 있고 $\theta=C_1\cosh(mx)+C_2\sinh(mx)$로 둘 수도 있다. 첫번째 경우는 경계조건이 무한대 또는 음의 무한대의 x가 포함된 경우에 적합한 형태이고 두번째 경우는 경계조건이 유한한 x에서 주어진 경우에 알맞은 형태이다.

경계조건

Fin의 기저에서는 일정한 온도가 유지되므로

x=0에서 $\theta=(T_0-T_\infty)=\theta_0$

끝단에서 열손실을 무시할 수 있다고 하면

x=L에서 $\frac{dT}{dx}=\frac{d\theta}{dx}=0$

따라서

$\theta=C_1\cosh(mx)+C_2\sinh(mx)$라 두고

위의 첫 경계조건을 적용하면

$C_1=\theta_0$

두번째 경계조건을 적용하면

$0=\theta_0 m\sinh(mL)+C_2 m\cosh(mL)$

$C_2=-\theta_0\tanh(mL)$

따라서

$$\theta=\theta_0\left(\cosh(mx)-\frac{\sinh(mL)}{\cosh(mL)}\sinh(mx)\right)=\frac{\cosh(mL)\cosh(mx)-\sinh(mL)\sinh(mx)}{\cosh(mL)}$$

$$=\theta_0\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

Fin을 통한 열전달 속도

(x=0에서 전도에 의한 열전달 속도)=(Fin 전체 표면적을 통한 대류 열전달 속도)

$$Q = -kA\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} = -kA\frac{d\theta}{dx}\bigg|_{x=0}$$:전도에 의한 열전달 속도

$$Q = hP\int_0^L \theta dx$$

위의 두 양은 같아야 하고 그 결과는 다음과 같다.

$$Q = Ak\theta_0 m \tanh(mL) = \theta_0\sqrt{PhkA}\tanh(mL)$$

Fin 효율, η

$$\eta = \frac{Q_{real}}{Q_{ideal}} = \frac{\theta_0\sqrt{PhkA}\tanh(mL)}{PLh\theta_0} = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

$$\eta = \begin{cases} \approx 1 & mL << 1 \\ \approx \frac{1}{mL} & mL >> 1 \end{cases}$$

Fin을 통한 실제 열전달 속도는 Fin 전체의 온도가 Fin의 기저부의 온도와 같다고 가정하여 구한 Q_{ideal} 에 위에서 구한 Fin 효율의 곱으로 구할 수 있다.

(예제 4-17)

(예제 4-19)

Fin이 여러 개 꼽혀 있는 경우에는

Q_t =(Fin을 통한 열전달) + (Fin 사이의 면적을 통한 열전달)

$$Q_t = \eta h a_f \theta_0 + a_b h\theta_0$$

a_f = Fin의 면적

a_b = Fin 사이의 면적

Fin의 단면적과 둘레가 변하는 경우(원판 Fin의 경우)

$$-\frac{d}{dr}\left(-kA\frac{dT}{dr}\right) = Ph(T - T_\infty)$$ 에서

$A = 2\pi rt$ t: 원판의 두께

$P = 2\pi r \times 2$: 양쪽 면이 외부 공기와 접하기 때문

Fin의 기저에서는 일정한 온도가 유지되므로

$r = r_i$ 에서 $\theta = (T_0 - T_\infty) = \theta_0$

끝단에서 열손실을 무시할 수 있다고 하면

$r = r_i + L$ 에서 $\dfrac{dT}{dr} = \dfrac{d\theta}{dr} = 0$

해석 결과는 그림 4-17에 주어져 있다.

(예제 4-18)