Chap 3. 1차원 열전도

3-1. 열전도 방정식

Fourier 법칙에 의하면 X방향으로의 열전도는 다음과 같이 기술된다.

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial X}$$

그림 3-1과 같은 기하학적 형태에 대하여 열 수지식을 세워보면

축적 = 입력 – 출력 + 생성

축적속도 = $A\Delta X\rho c\frac{\partial T}{\partial t}$

X=X를 통한 입력 속도 = $Aq\big|_X = -kA\frac{\partial T}{\partial X}\Big|_X$

$X = X + \Delta X$ 를 통한 출력 속도 = $Aq\big|_{X+\Delta X} = -kA\frac{\partial T}{\partial X}\Big|_{X+\Delta X}$

생성 속도 = g(단위 부피당의 생성 속도)$\times A\Delta X$

이 관계를 열 수지식에 대입하여 정리하면

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{A\Delta X}\left[\left(-kA\frac{\partial T}{\partial X}\Big|_X\right) - \left(-kA\frac{\partial T}{\partial X}\Big|_{X+\Delta X}\right) + A\Delta X g\right]$$

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{A\Delta X}\left[\left(-kA\frac{\partial T}{\partial X}\Big|_X\right) - \left(-kA\frac{\partial T}{\partial X}\Big|_{X+\Delta X}\right)\right] + g$$

$\Delta X \to 0$ 의 극한을 취하고 정리하면,

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial X}\left(kA\frac{\partial T}{\partial X}\right) + g$$

<u>직교좌표계에서</u>

X=x

A=constant

k=k(x)

g=g(x,t)

이므로

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+g$$

k가 상수이면

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+g$$

k가 상수이며, 정상상태에서는 (이제는 더 이상 편미분 방정식이 아니다)

$$k\frac{d^2 T}{dx^2}+g=0$$

k가 상수이고, 물체 내부에 에너지 원이 없는 정상상태의 경우에는

$$\frac{d^2 T}{dx^2}=0$$

원통 좌표계에서

X=r

$$A=2\pi rH$$

k=k(r)

g=g(r,t)

이므로

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial x}\right)+g$$

k가 상수이면

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+g$$

k가 상수이고 정상상태에서는

$$k\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+g=0$$

k가 상수이고, 물체 내부에 에너지 원이 없는 정상상태의 경우에는

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0$$

구 좌표계에서

X=r

$$A=4\pi r^2$$

k=k(r)

g=g(r,t)

이므로

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+g$$

k가 상수이면

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=k\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+g$$

k가 상수이고 정상상태에서는

$$k\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)+g=0$$

k가 상수이고, 물체 내부에 에너지 원이 없는 정상상태의 경우에는

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0$$

3-2. 열전도 방정식의 재정리

위의 세가지 경우는 다음과 같이 하나의 식 형태로 나타낼 수 있다.

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{X^n}\frac{\partial}{\partial X}\left(kX^n\frac{\partial T}{\partial X}\right)+g$$

직교 좌표계 : n=0, X=x

원통 좌표계 : n=1, X=r

구 좌표계 : n=2, X=r

k가 상수인 경우는

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{1}{X^n}\frac{\partial}{\partial X}\left(X^n\frac{\partial T}{\partial X}\right)+\frac{g}{\rho c}$$

$\alpha=\frac{k}{\rho c}$ = 열 확산 계수 [m^2/s]

1) 정상상태

정상상태는 시간에 따라 온도의 변화가 없는 경우이므로 위에서 유도된 식들에서 시간에 대한 도함수를 0으로 두면 정상상태에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$\alpha\frac{1}{X^n}\frac{\partial}{\partial X}\left(X^n\frac{\partial T}{\partial X}\right)+\frac{g}{\rho c}=0$$

또는

$$\frac{1}{X^n}\frac{\partial}{\partial X}\left(X^n\frac{\partial T}{\partial X}\right)+\frac{g}{k}=0$$

3-3. 경계조건

1) 확정된 온도 경계조건

예) $x=x_0$에서 $T=T_0$

2) 확정된 열속 경계조건

예) $x=x_1$에서 $-k\frac{dT}{dx}=q_1$

3) 대류 경계조건

x=L을 고체와 유체의 경계면이라 하면, 고체의 외부에서는 대류에 의한 열전달이 존재하고 고체 내부에서는 전도에 의한 열전달이 존재한다. 하지만 두 열전달 속도는 에너지 수지로부터 같아져야 하므로 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$x=L\text{ 에서 }\ -k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}=h\left(T_\infty-T\big|_{x=L}\right)$$

전도에의한 열속 — 대류에의한 열속

(음의 부호는 열전달 방향을 고려하여)

4) 대칭조건

대칭인 경우에는 대칭점에서 온도 구배가 0이 되므로

x=대칭점에서 $\frac{dT}{dx}=0$

3.4 열전도 문제에 대한 수식

열전도 문제는 앞에서 유도한 열전도 방정식과 그에 따르는 적절한 초기 조건 및 경계조건으로 구성된다.