일정열속으로 가열되는 수평 유체층에서 대류 불안정성

박정환, 최창균, 정태준, 김민찬*
서울대학교 응용화학부, 제주대학교 화학공학과*

Convective Instability in Horizontal Fluid Layers Heated with Constant Heat Flux

Joung Hwan Park, Chang Kyun Choi, Tae Joon Chung, Min Chan Kim*
School of Chemical Engineering, Seoul National, University
Department of Chemical Engineering, Cheju National University*

서론

상하부 고정경계면을 가진 수평 유체층의 밑면을 일정열속으로 가열하면 Rayleigh 수가 1296 일 때 대류가 발생한다. 본 연구에서는 가열 초기 시점에서 비선형 온도분포가 시간에 따른 함수로 형성될 때, 대류발생 시점인 t_c 가 중요한 관건이 된다. Morton[1]은 선형이론에 근거하여 동결시간 모델로 안정성 해석을 수행하였으며, Foster[2]는 교란량의 시간에 따른 변화를 고려한 증폭이론을 이용하여 해석을 수행하였다. Yang 과 Choi[3]는 t_c 를 주요인자로 하여 교란의 거동을 열침투깊이를 길이척도로 유사변환시킨 전파이론을 통해 안정성 해석을 수행하였으며 대류유동의 크기에 대한 정보를 제공함과 동시에 전시간 영역으로 해석을 확대하였다. Nielsen 과 Sabersky[4]는 실리콘 오일을 이용한 실험에서 가시대류 발생시점을 도시하였다. 이는 앞에서 언급한 이론적 해석들과 차이를 보인다. Malher 등[5]은 준정상상태 가정을 바탕으로 교란의 성장률의 변화를 통한 불안정성 해석으로 이러한 실험과의 차이를 설명하였다.

본 연구에서는 가시대류 발생과 관련된 교란의 거동 및 열전달 특성을 유한부피법에 의하여 수치해석적으로 연구하였으며, 성장률의 변화에 따른 대류발생 임계시점의 결정에 대한 연구도 함께 수행하였다.

이론

본 연구에서는 길이 d 만큼 떨어진 무한수평판 사이의 초기온도 T_i 인 뉴튼유체를 하부에서 일정열속 q_w 로 가열하는 잘 알려진 Rayleigh-Bénard 대류 기본계를 상정하고 있으며, 가열초기상태를 Fig. 1 에 간단히 나타내고 있다. 윗면은 T_i 로 유지되며, 밑면의 온도는 시간에 따른 함수 형태로 나타난다. 온도가 증가함에 따라 부력에 의해 자연대류가 발생한다. Boussinesq 가정을 기본으로 하여 다음과 같은 2 차원 계에 대한 무차원 지배방정식이 주어진다.

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+Pr\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+Pr\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]+PrRa_q\theta \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}=\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \tag{4}$$

여기서 v, w 는 수평, 수직속도를 열확산계수와 수직높이 비 α/d 로 무차원화 한 것이며, 온도는 열전도도 k 와 열속에 의해 $\theta(=k(T-T_i)/q_w d)$ 로 표시된다. y, z 는 수평, 수직길이를 d 로 무차원한 것이며, $p(=Pd^2/\rho\alpha^2)$ 는 압력 P 의 무차원 변수, $\tau(=\alpha t/d^2)$ 는 시간 t 의 무차원 변수이다. 식에서 도출된 무차원수인 Prandtl 수 $Pr(=\nu/\alpha)$ 과 Rayleigh 수 $Ra_q(=g\beta q_w d^4/k\alpha\nu)$ 는 중요한 인자이며, 여기에 주어진 동점도 ν , 열팽창계수 β , 중력가속도 g 및 열확산계수는 Rayleigh 대류의 주요 환경요소이다. 또한 일정열속 조건에서

의 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\theta = 0 \qquad \text{at} \quad \tau = 0 \;\text{ and }\; z = 1 \tag{5}$$

$$\partial\theta/\partial z = -1 \qquad \text{at} \quad z = 0 \tag{6}$$

가열이 전도에 의해서만 좌우될 때, 온도분포는 급격한 가열에서는 선형을 유지되기 어려우며, 시간에 대한 함수로 나타난다. 식 (5), (6)과 같은 경계조건을 갖는 일정열속 가열계에서 전도에 의한 기본온도 T_0 는 다음과 같은 무차원 식으로 나타낼 수 있다.

$$\theta_0 = 2\sqrt{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\text{ierfc}\left(\frac{n}{\sqrt{\tau}}+\frac{\zeta}{2}\right)-\text{ierfc}\left(\frac{n+1}{\sqrt{\tau}}-\frac{\zeta}{2}\right)\right\} \tag{7}$$

여기서 θ_0 는 $k(T_0 - T_i)/q_w d$ 이며, ζ 는 $z/\sqrt{\tau}$ 이다.

부력의 변화에 의해 자연대류 임계시점에 이르면 교란이 발생한다. 정지 유체층에서 유체 속도는 교란속도이며, 아래 첨자 1 을 붙여 의미상 구분을 하였으며, 온도교란은 전도식에 의한 기본온도와의 차로 교란값을 정한다. 계산의 편의를 위해 θ_1 은 $Ra_q(\theta-\theta_0)$ 로 설정하고, 전파이론에 의해서 τ 가 작을 경우 교란을 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다[3].

$$\left[w_1(\tau,y,z), \theta_1(\tau,y,z)\right] = \left[\tau^{3/2}w^*(\zeta),\, \tau^{1/2}\theta^*(\zeta)\right]\exp[i(ay)] \tag{8}$$

여기서 i 는 허수이며, a 는 무차원 파수이다. 선형이론에 근거하여 지배방정식으로부터 교란방정식을 구한 후 전파이론을 적용하면 다음과 같은 안정성방정식을 구할 수 있다[3].

$$\left\{\left(D^2 - a^{*2}\right)^2 + \frac{1}{2Pr}\left(\zeta D^3 - a^{*2}\zeta D + 3a^{*2}\right)\right\}w^* = a^{*2}\theta^* \tag{9}$$

$$\left\{D^2 + \frac{1}{2}\zeta D - \left(a^{*2} + \frac{1}{2}\right)\right\}\theta^* = Ra_q^* w^* D\theta_0^* \tag{10}$$

여기서 $a^* = a\tau^{1/2}$, $Ra_q^* = Ra_q\,\tau^2$, $D = d/d\zeta$, $D\theta_0^* = \tau^{-1/2}D\theta_0$ 이며, 경계조건들은 다음과 같다.

$$w^* = Dw^* = D\theta^* = 0 \qquad \text{at} \quad \zeta = 0 \tag{11}$$

$$w^* = Dw^* = \theta^* = 0 \qquad \text{at} \quad \zeta = 1/\sqrt{\tau} \tag{12}$$

안정성방정식과 경계조건을 바탕으로 “shooting method”와 외삽법을 이용하여 임계시점과 교란분포를 수치해석적으로 구할 수 있다.

전파이론에서 구한 대류발생 임계시점은 가시대류 발생시점과 차이를 보인다. Mahler 등[5]과 Foster[6]도 이에 대해 언급하고 있으나 그 정확한 메커니즘과 물리적 의미를 밝히지는 못하고 있다. 본 연구에서는 Patankar[7]에 의해 고안된 유한부피법을 이용하여 시간에 따른 교란의 성장과 온도변화 추이를 도시하고 이로부터 위의 대류시점 간의 관계를 설명하였다. 식(1)~(6)의 지배방정식과 경계조건을 바탕으로 2 차원 정렬격자모델에서 일정시간간격의 변화를 통해 비정상상태 문제를 풀었으며, 압력 계산을 위해 SIMPLE 방법을 사용하였다. 제어체적 내부의 국지적 수렴성과 시간 변화에 따른 수렴성 이동은 양자간의 상호관계를 갖는다. 가열초기 제어체적 내의 격자간격의 물리적 타당성과 시간변화에 다른 안정적인 수렴성 이동이 확보되는 시간간격 $\Delta\tau = 10^{-7}$ 과 격자간격 $\Delta z = 1/200$ 을 설정하였다. 초기상태의 속도 및 온도교란분포는 안정석해석에서 구한 교란의 진폭분포를 바탕으로 다음과 같이 배열하였다.

$$w(\tau,z)\,|_{\tau=0} = w_*(w_1(\tau,z)/w_{1,\max})\,|_{\tau=\tau_c} \tag{13}$$

$$\theta'(\tau,z)\,|_{\tau=0} = \theta_*(\theta_1(\tau,z)/\theta_{1,\max})\,|_{\tau=\tau_c} \tag{14}$$

교란크기의 비는 전파이론에서 나온 τ_c 에서의 교란분포 결과에 따라 $w_*/\theta_* = 10^3$ 로 입력하였다.

결과 및 토론

전파이론에서는 임계시간 τ_c 를 주요인자로 하여 Ra_q 에 대한 고유치 문제로 안정성해석을 수행한다. $Pr \to \infty$ 에 대하여 구한 Ra_q 와 τ_c 의 관계를 Fig. 2 에 나타내었으며, Nielsen 과 Sabersky[4]의 실험결과는 가시대류 발생시점이 $3.2\tau_c$ 로 전 영역에서 해석값과

균일한 관계를 보인다. 유한부피법에 의해 계산된 온도교란분포를 Fig. 3 에 나타내었다. $\tau = 3.2\tau_c$ 일 때, $\tau = \tau_c$ 와 비교해서 교란의 성장이 확연하게 드러난다. 따라서 τ_c 에서 $4\tau_c$ 에 이르기 까지 교란의 성장이 이루어지며, $3.2\tau_c$ 에 이르러 가시화된 속도 및 온도 유동이 형성됨을 예상할 수 있다. 이를 살펴보기 위한 속도 및 온도교란의 시간에 따른 변화를 Fig. 4 에 도시하였다. 여기서 나타낸 w_{rms}, θ'_{rms} 는 다음과 같이 정의된다.

$$(w_{rms}, \theta'_{rms}) = \left(\left[\int_A w^2 dA \right]^{1/2}, \left[\int_A \theta'^2 dA \right]^{1/2} \right) / A \tag{15}$$

여기서 $\theta = \langle\theta\rangle + \theta'$ 의 관계를 가지며, $\langle\theta\rangle$ 는 수평길이 평균값으로 z 와 τ 의 함수이다. w_{rms} 와 θ'_{rms} 는 초기교란의 크기에 따라 일정 스케일로 유지되다가 급격히 증가하여 최고값을 보인 후 감소와 함께 비규칙적 거동을 보인다. 이는 대류에 의한 속도 및 온도의 심한 요동을 보여준다고 하겠다.

시간에 따른 교란값의 변화를 효과적으로 분석하기 위해 다음과 같은 성장률 변수를 새로운 척도로 도입하였다.

$$r_0 = \frac{1}{\langle\theta\rangle_{rms}} \frac{d\langle\theta\rangle_{rms}}{d\tau} \tag{16}$$

$$r_1 = \frac{1}{\theta'_{rms}} \frac{d\theta'_{rms}}{d\tau} \tag{17}$$

위의 성장률을 Fig. 5 에 도시하였다. r_0 는 국지적인 미소교란을 무시한 평균적인 온도변화에 따른 것으로 식 (7)의 전도식에 의해서 구한 온도변화와 거의 같다. r_1 은 온도교란의 성장률을 의미하는데 초기에는 Fig. 4 에서도 알 수 있듯이 그 변화가 두드러지지 않으며, 처음에 입력된 임의의 미소교란이 소멸되면서 음의 값을 보인다. 가열이 진행되면서 r_1 은 급격히 증가하고 최고값을 보인 후 다시 하강하여 불규칙한 변화를 보인다. 전도가 우세한 가열 초기에는 $r_0 > r_1$ 이나, $r_1 > 0$ 에서 교란이 성장하면서 교란온도변화가 전도식에 의한 온도변화를 능가하면 $r_1 \geq r_0$ 가 되며 불안정한 상태에 이르게 된다. 전파이론으로부터 구한 τ_c 부근에서 $r_1 > r_0$ 가 되며, τ_c 는 계가 불안정해지는 임계점을 의미한다. r_1 이 최고값에 이르면 대류가 지배적인 열전달 요인이 되며, 밑면 온도의 하강으로 Nusselt 수 $Nu(= q_w d / (T_w - T_i))$ 가 전도식에서 벗어나게 된다. 시간에 따른 Nu 의 변화를 Fig. 6 에 도시하였다. Kim 과 Kim[8]은 Nu 가 증가하기 시작하는 시점을 대류발생 임계시점으로 보고 실험결과와 비교하고 있다. Fig. 6 에 나타난 Nu 극소점은 $3.2\tau_c$ 에서 나타나고 있으며, 실험결과와도 일치한다.

교란의 거동과 온도변화에 대한 결과로부터 전파이론에서 구한 τ_c 는 불안정성이 감지되는 시점이며, $3.2\tau_c$ 까지의 시간은 가시대류가 발생하기 위한 성장 구간이라고 할 수 있다. 이는 전파이론이 대류발생을 예측함과 동시에 관찰이 힘든 유체 내의 불안정성을 판별하는 효과적인 모델이라는 것을 보여주고 있다. 이는 기존 안정성해석의 임의성을 극복하고 보다 명확한 임계기준을 제공하여 복잡한 미세공정조건의 안정성확보 및 유동예측시스템의 효율적인 제어를 용이하게 할 것으로 기대된다.

감사

본 연구는 교육인적자원부 주관 BK21 프로젝트와 ㈜ LG 화학의 지원으로 이루어졌음을 밝히며 이에 감사의 뜻을 전함

참고문헌

1. Morton, B.R.: *J. Mech. Appl. Math.*, **10**, 433(1957)
2. Foster, T.D.: *Phys. Fluids*, **8**, 1249(1965)
3. Yang, D.J. and Choi, C.K.: *Phys. Fluids*, **14**, 930(2002)
4. Nielsen, R.C. and Sabersky, R.H.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **16**, 2407(1973)
5. Mahler, E.G., Schechter, R.S. and Wissler, E.H.: *Phys. Fluids*, **11**, 1901(1968)
6. Foster, T.D.: *Phys. Fluids*, **12**, 2482(1969)
7. Patankar, S.V.: "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Taylor & Francis, New York(1980)

8. Kim, K.H. and Kim, M.U.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **29**, 193(1986)

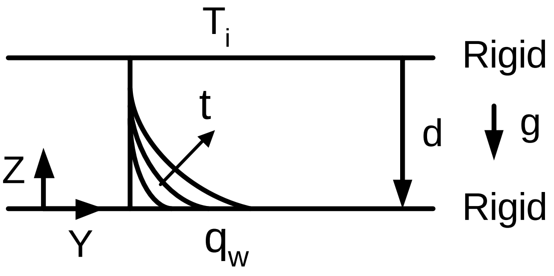


Fig. 1. Schematic diagram of the basic conduction state.

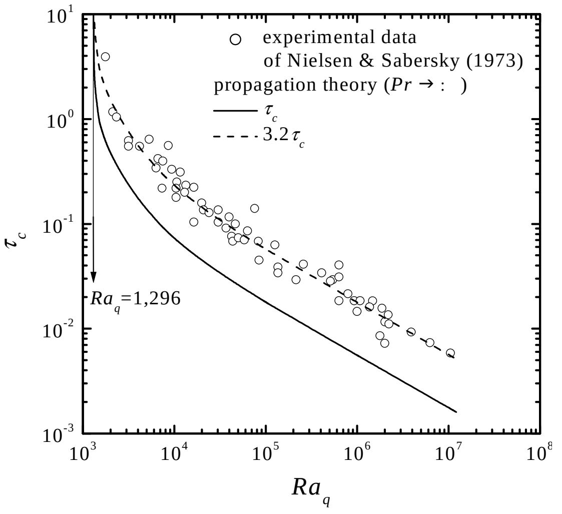
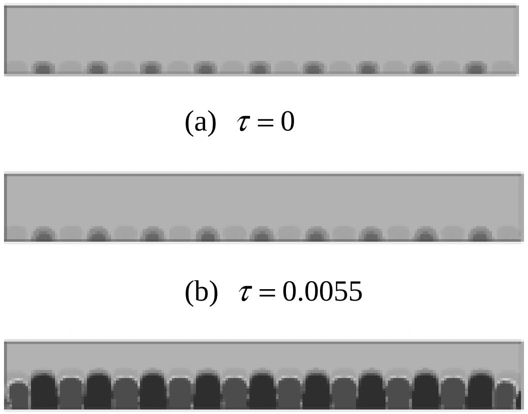


Fig. 2. Onset of convection.



(a) $\tau = 0$

(b) $\tau = 0.0055$

(c) $\tau = 0.0176$

Fig. 3. Temperature disturbances.

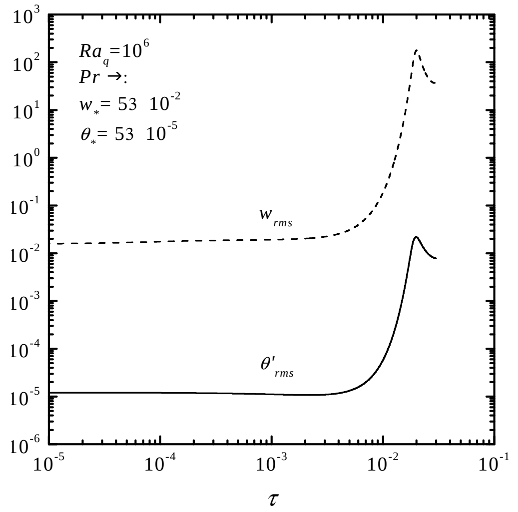


Fig. 4. Temporal behavior of disturbances.

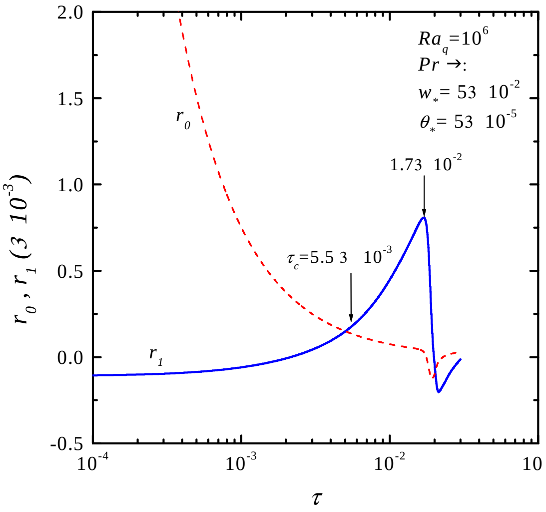


Fig. 5. Growth rate of temperature disturbances.

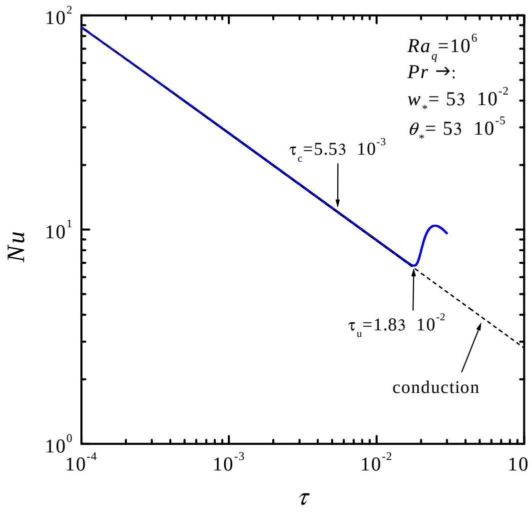


Fig. 6. Time-dependent Nusselt number.