

유한요소법을 이용한 열성형 공정에서의 수지의 비선형 자유부풀림거동 해석

남 기준, 이 재식, 박 홍목, 이 재욱
서강대학교 화학공학과

Finite Element Analysis of Nonlinear Free Inflation Behaviors in Thermoforming Process

G. J. Nam, J. S. Lee, H. M. Park, J. W. Lee
Department of Chemical Engineering, Sogang University

서론

유리 전이 온도 이상으로 가열된 열가소성 수지평판에 압력을 부가함으로써 원하는 형상의 성형품을 얻는 열성형 공정은, 성형시 대상 수지가 큰 변형을 일으킬 뿐만 아니라 비선형적 거동을 보이기 때문에 변형거동의 예측에 많은 어려움을 겪게 된다. 따라서 본 연구에서는 이러한 열성형 공정의 최적화를 위한 기초적 연구의 일환으로써 유한요소법을 이용하여 수지의 자유 부풀림 거동을 예측할 수 있는 수치모사 알고리즘을 개발하고자 하였다.

구성방정식은 Piola-Kirchhoff 응력 텐서와 Green 변형 텐서를 사용하였으며, 수지의 물질 모델식으로는 Mooney-Rivlin 모델과 Ogden 모델을 사용하였다. 얇은 평판의 경우 membrane approximation을 사용하여 수립한 방정식으로부터 해를 얻었으며, 두꺼운 평판의 경우 membrane approximation을 사용하지 않고 구성된 방정식에 Penalty method를 도입하여 비압축성 조건을 만족시키며 해를 얻었다[1].

이론

대상 물질에 가해지는 압력에 의해 나타나는 내부에너지의 변화는

$$\int_a P \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, da = \frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho \varepsilon \, dv \quad (1)$$

으로 표현되며, P는 대상수지에 가해지는 압력, \mathbf{v} 는 속도, ρ 는 물질의 밀도; ε 는 내부에너지 밀도를 의미한다. 식(1)을 유한요소화하여 stiffness matrix와 load vector로 표현하면

$$[K] [x] = [F] \quad (2)$$

$$[K] = \int_{V^e} \left[\frac{\partial N}{\partial \mathbf{X}} \right]^T [T] \left[\frac{\partial N}{\partial \mathbf{X}} \right] \, dV \quad (3)$$

$$[F] = \int_{A^e} P [nN] \, dA \quad (4)$$

와 같이 되는데 이때 N은 형태함수, T는 Piola-Kirchhoff 응력 텐서, \mathbf{X} 는 위치 벡터, \mathbf{n} 은 방향 벡터를 의미한다. 압력을 받는 수지의 변형은 매우 비선형적 거동을 보이게 되므로 식(1)에서 한번에 근을 구할 수 없고 반복 수렴해를 구해

야 한다. 일반적으로 널리 사용되는 Newton-Raphson 수렴방법을 사용하여 식(1)을 series expansion하면

$$[K] \cdot [x] + \left([K] + \left[\frac{\partial K}{\partial x} \right] [x] \right) \cdot [\Delta x] = [F] \quad (5)$$

이 된다. 한편 Piola-Kirchhoff 응력 텐서[2]를 Mooney-Rivlin 물질 모델식을 도입하여 전개하면, membrane approximation을 사용한 경우에는

$$T_{11} = 2(1 - C_{22}C_{33}^2) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + C_{22} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (6)$$

$$T_{22} = 2(1 - C_{11}C_{33}^2) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + C_{11} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (7)$$

로 표현되고 membrane approximation을 사용하지 않은 경우에는

$$T_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} = \phi g^{ij} + \psi B^{ij} + h G^{ij} \quad (8)$$

이 되는데 이때 W 는 내부 에너지 밀도, C_{ij} 는 Green 변형 텐서, I_1 는 invariant, ϕ 는 $2(\partial W/\partial I_1)$, ψ 는 $2(\partial W/\partial I_2)$, h 는 $2I_3(\partial W/\partial I_1)$, g^{ij} 와 G^{ij} 는 각각 변형 후와 변형 전의 contravariant metric 텐서를 의미한다. Membrane approximation을 사용하지 않은 경우에는 비압축성 조건을 만족시키기 위해 Penalty method를 도입하였으며, 사용한 Penalty function은 다음과 같다.

$$f = \frac{1}{\varepsilon} (I_3 - 1)^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (9)$$

결과 및 토론

Fig.1 에서는 얇은 원형 평판을 대상으로 membrane approximation을 가정하여 얻은 부풀림 거동을 분석해(analytic solution)[3]와 비교 도시하였는데 유한요소수치해와 분석해가 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다.

두꺼운 성형품의 경우에는 membrane approximation을 사용할 수 없게 되므로 두께 방향의 응력을 고려하였는데, 완전해(exact solution)[4]가 존재하는 무한 길이의 두꺼운 원통계와 두꺼운 원형 컨테이너 계에 대해 얻은 부풀림 거동을 Fig.2 와 Fig.3 에 각각 나타내었다. Fig.2 에는 압력변화에 따라 원통 최내각 노드의 위치변화를 완전해와 비교 도시하였는데 얻어진 수치해는 압력단계에 비교적 민감함을 알 수 있었고 또 압력단계(loadng step)를 증가시킬수록 완전해에 근접함을 알 수 있었다. Fig.3 은 원형 컨테이너 안에서 압력을 가하여 나타나는 변형이 컨테이너의 위쪽보다 옆쪽에서 더 큼을 보여주고 있다. 대상계가 선대칭이므로 계의 1/4만을 계산에 이용하였으며, 36개의 노드와 24개의 엘리먼트를 사용하였고 경계조건은 z 가 0인 곳에서의 z 방향으로의 변위는 없다고 가정하였다.

참고 문헌

- [1] Song, W. N., Mirza, F. A. and Vlachopoulos, J.: *J. Rheol.*, **35**, 93 (1991).
- [2] Oden, J. T.: *"Finite Elements of Nonlinear Continua"*, McGraw-Hill, NewYork, NY(1972).
- [3] Green, A. E. and Adkins, J. E.: *"Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics"*, Oxford University Press, Oxford(1970).
- [4] Green, A. E. and Zerna, W.: *"Theoretical Elasticity"*, 2nd edi., Oxford University Press, Clarendon(1968).

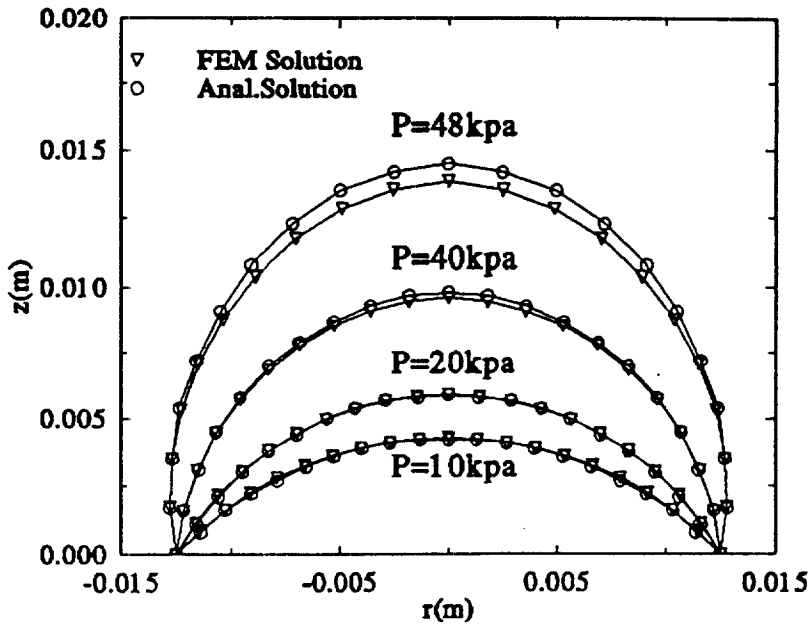


Fig.1 2 Dimensional axisymmetric free inflation of 8% sulfur rubber. Model is Mooney-Rivlin model.

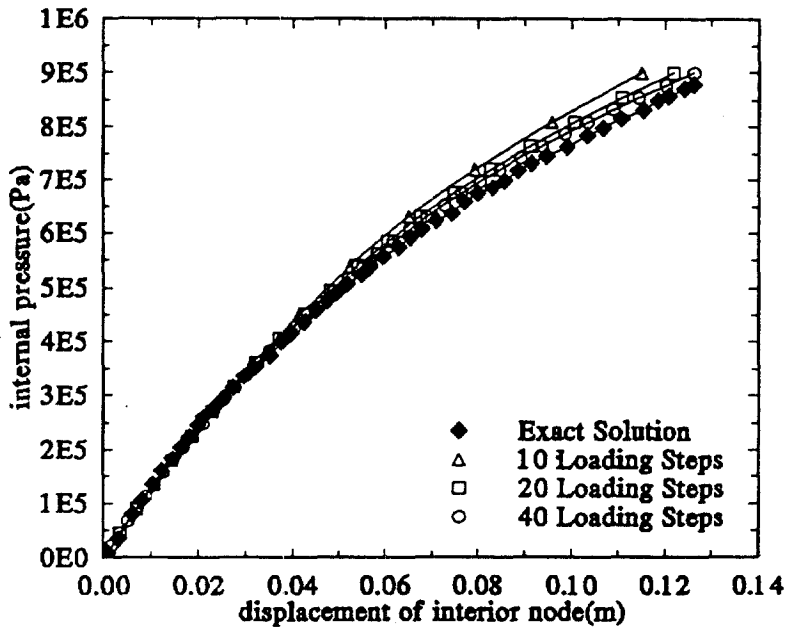


Fig.2 Comparison of displacement with various loading steps.

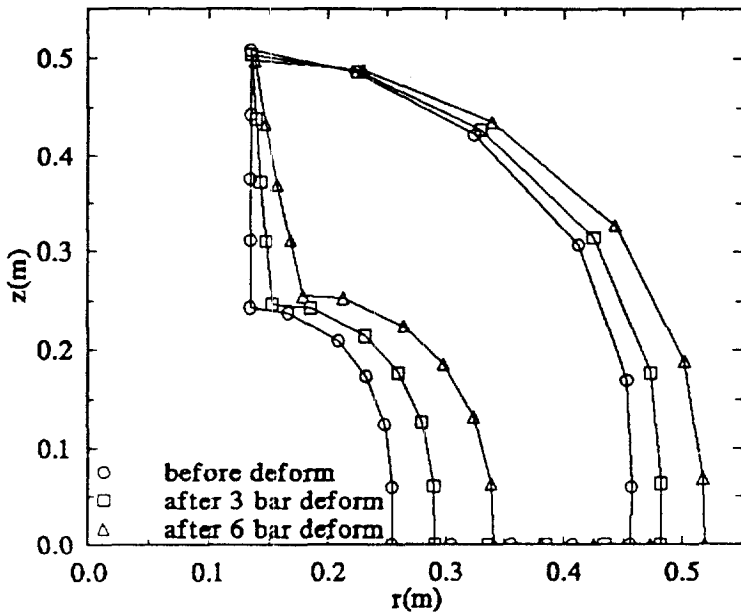


Fig.3 Deformation of thick walled container after about 6 bar loading.