3. 시간 / 주파수 분해

Fourier 변환은 신호를 각각의 주파수 요소로 분해하기 때문에 주파수 분해능만을 갖는다는 것은 널리 알려진 사실이다. 이는 Fourier expansion 의 basis 함수가 무한대인 복소수의 지수형이기 때문이다. STFT 와 wavelet 변환은 이같은 Fourier 변환의 단점 극복을 위해 고안되었다. STFT 와 wavelet 변환의 기본적인 생각은 시간-주파수 분해의 관점에서 이해될 수 있다. 이 시간-주파수 분해는 시간 분해능이 없다는 Fourier 변환의 주된 문제를 극복할 수 있다.

3.1 Short-Time Fourier 변환 (STFT)

이산 STFT 분해는 다음과 같은 형태의 함수를 사용한다: $w_{j,k} = w(t - k\tau_0)e^{-i\varpi_0 jt}$ 이때 w(t)는 window 함수라 불리 운다. 만약 이러한 함수가 orthonormal basis 를 이루면, 원 신호는 $\sum_{j,k}\langle x, w_{j,k}\rangle w_{j,k}(t)$ 와 같이 표현된다. 그러므로 STFT 는 국부적인 Fourier 변환으로 볼 수 있다. STFT 계수, $\langle x, w_{j,k}\rangle$ 는 window 함수와 [$k\tau_0$, $j\omega_0$]에 중심을 둔 원 신호사이의 correlations 이다. 만약 Δ_t 와 Δ_w 가 시간-주파수 평면상에서의 넓이라면, 불확실성의 원리에 따라 둘의 곱인 $\Delta_t\Delta_w$ 가 ½ 보다 작거나 같아야 한다. 평면상의 넓이는 window 함수에 따라 결정되나 변환 중에는 변하지 않는다. 다시 말해서, 시간과 주파수 전역에서 고정된 분해능을 갖는다. (Fig. 3 참조). 자주 사용되는 window 함수에는 직각, 삼각, Hanning, 그리고 Gaussian 함수 등이 있다..

3.2 연속 Wavelet 변환

wavelet 변환에서는 크기 조절이 가능한 변조된 "window" 함수가 쓰여 STFT 의 문제인 고정된 시간-주파수 분해능을 해결한다. 이는 다음과 같이 나타낼 수 있는데

$$CWT_f(a,b) = \int \psi^*_{a,b}(t)x(t)dt = \langle \psi_{a,b}(t), x(t)\rangle \quad (8)$$

이때 $\psi_{a,b}(t)$ 는 전이(shifted)되고 비례(scaled)화된 "mother wavelet"이고 다음과 같이 정의되며(a,b $\in \Re$)

$$\psi_{a,b}(t)\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (9)$$

이때 표준화(normalization)는 다음을 보장한다: $\|\psi_{a,b}(t)\| = \|\psi(t)\|$. Wavelets 는 다음의 admissibility condition 을 만족시키며

$$C_\psi = \int \frac{|\Psi(\varpi)|^2}{|\varpi|} d\varpi < \infty \quad (10)$$

이때 $\Psi(\varpi)$ 는 mother wavelet 의 Fourier 변환이다. 실제로 mother wavelet 은 항상 충분한 감쇄를 갖기 때문에 admissibility condition 이 "$\Psi(0) = 0$"의 조건으로 귀착된다. 그러면, 원 신호 x(t)는 다음의 공식으로 다시 구성 될 수 있다.

$$x(t) = \frac{1}{C_f}\iint CWT_f(a,b)\psi_{a,b}(t)\frac{dadb}{a^2} \quad (11)$$

그러나 실제로는 불연속 표본으로부터의 재 구성이 바람직하므로, 다음과 같은 비례(scaling), 전이(shift) 매개변수의 이산화(discretization)가 사용된다:

$$a = a_0^m, b = nb_0 a_0^m,\ m,n \in Z, a_0 > 1, b_0 > 0. \ (11)$$
이산화된 wavelets 는 아래와 같다.

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}t - nb_0)\ . \ (12)$$

다른 m 값은 다른 넓이의 wavelets 를 만드는데, 다시 말하면 좁은 고주파의 wavelets 는 모든 축을 “cover”하기 위해 좁은 간격으로 이동하는 반면, 넓은 저주파의 wavelets 는 넓은 간격으로 이동한다. 게다가, 변환계수 $\langle \psi_{m,n}, f \rangle$ 로부터 수학적으로 안전한 재구성을 위해선 다음의 조건이 만족되어야 하고

$$A\|f\|^2 \le \sum_{m,n} \left| \langle \psi_{m,n}, f \rangle \right|^2 \le B\|f\|^2 \ (13)$$

$\psi_{m,n}$ 는 frame 이라 불리우며, A 와 B 는 frame bounds 이다.

3.2.1 국부화 특성

연속 wavelet 변환은 몇 가지 특성을 가지고 있으며 그들 중 몇몇은 Fourier 변환과 유사하지만 다른 것들도 있다. 가장 구별되는 특성중 하나는 시간-주파수 국부화이다. 이 국부화 특성은 다음과 같이 설명될 수 있다.

시간 t_0 에서 Dirac pulse $\delta(t - t_0)$ 의 CWT 는

$$CWT_\delta(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\delta(t - t_0)dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t_0 - b}{a}\right) \ (14)$$

이다. 다시 말해서, 변환은 pulse 의 위치인 t_0 에 중심을 두고 시간에서 거꾸로 된, 표준화된 wavelets 과 같다. 작은 a 의 경우, 변환은 Dirac pulse 를 매우 좋은 국부화 성질을 가지고 확대한다. 이것이 바로 시간 국부화 특성이다.

주파수 국부화의 설명을 위해 sinc wavelet 을 고려해 보자. sinc wavelet 의 spectrum 은 $\pi \le |\omega| \le 2\pi$ 구간에서 1 이다. ω_0 에서 단위 크기의 복소수 사인곡선에의 경우, 사인곡선을 통과시키는 가장 높은 주파수의 wavelet 은 비례율 $a_{min} = \pi/\omega_0$ 를 갖는 반면, 사인곡선을 통과시키는 가장 낮은 주파수의 wavelet 은 $a_{max} = 2\pi/\omega_0$ 의비례율을 갖는다. octave-band 필터를 사용하는 주파수 분해능은 특히 높은 주파수 영역에서 제한적이나 이는 좁은 bandpass 필터를 사용하여 극복할 수 있다.

3.3 다분해능(multiresolution) 분석

다분해능(multiresolution) 분석은 wavelet bases 를 유도하기 위한 도구일 뿐 아니라, wavelet 과 subband 신호 분해와 관계된 문제의 개념화에 매우 유용한 수학적 체제이다. 다분해능(multiresolution) 분석(MRA) 은 영상이 가지고 있는 정보를 분석하는데 있어서 자연스럽고 매우 효과적인 방법인데 그 이유는, 각각 다른 분해능에서 세부 영상은 일반적으로 각각 다른 물리적 구조를 묘사하고, 낮은 분해능에선, 이러한 세부 영상은 전체 영상의 배경에 해당하는 큰 구조들을 나타낸다.

다분해능 (multiresolution) 분석은 일련의 닫힌 부공간(subspaces)로 이루어졌으며

$$\cdots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_1 \subset V_{-2} \cdots \ (15)$$

그 부공간은 다음과 같은 성질을 같는다.

(a) 위로의 완전함 (Upward Completeness)

$$\overline{\bigcup_{m\in z}} V_m = L_2(\Re)$$

(b) 아래로의 완전함 (Downward Completeness)

$$\bigcap_{m\in z} V_m = \{0\}$$

(c) 비례 불변(Scale Invariance)

$$f(t)\in V_m \Leftrightarrow f(2^m t)\in V_m$$

(d) 전이 불변(Shift Invariance)

$$f(t)\in V_0 \Rightarrow f(t-n)\in V_0,\ \text{for all } n\in Z$$

(e) Basis 의 존재　다음과 같은 함수 $\varphi\in V_0$ 가 존재한다:

$\{\varphi(t-n)\,|\,n\in Z\}$ 는 V_0 의 직각 basis 이다.

이때 $\varphi(t)$ 는 비례(scaling) 함수라 불리 운다.

위는 다분해능(multiresolution) 분석의 수학적 정의이다. 이 정의로부터, 다음과 같은 wavelet 의 근본적 성질들을 추론할 수 있다: (1) 비례 함수는 2-scale 식을 만족시킨다. (2) 비례 함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0[n]\varphi(2t-n)$$

(3) $G_0(e^{j\omega})$ 는 π-주기 함수이다

$$\left|G_0(e^{j\varpi})\right|^2+\left|G_0(e^{j(\varpi+\pi)})\right|^2=2\,.$$

3.4 Wavelets 의 구성

3.4.1 반복되는 Filter Bank 로부터의 Wavelets

위에 주어진 정의는 근사(approximation) 공간 V_m 의 bases 가 존재함을 보장하며, 이는 곧바로 연속 wavelets 의 구성으로 통한다. Wavelets 을 구성하는 또 다른 방법은 반복되는 filter bank 를 사용하는 것으로 이는 일정 길이의 이산 필터를 사용하여 매우 실질적이다. 반복되는 filter bank 로부터 wavelets 을 구성하려면, 필터는 반드시 정규(regularity) 조건을 만족시켜야 한다. 정규조건을 위한 필요조건은 이산 필터가 반드시 ω=π에서 zero 를 가져야 한다는 것이다. 이는 필터의 반복이 중앙 극한(certain limit) 함수로 수렴함을 의미한다. Daubechies 에 따르면, 규정 조건을 위한 충분조건은 만약 $B<2^{N-1}$ 이면 i 가 무한대로 접근할 때 극한 함수 $\varphi^{(i)}(t)$는 다음과 같은 Fourier 변환을 가진 연속 함수 φ(t) 로 수렴한다.

$$\Phi(\varpi)=\prod_{k=1}^{\infty} M_0\left(\frac{\varpi}{2^k}\right). \quad (16)$$

여기서

$$M_0(\varpi)=\frac{1}{\sqrt{2}}G_0(e^{j\varpi}). \quad (17)$$

그리고

$$B=\sup_{\omega\in[0,2\pi]}\left|R(\varpi)\right| \quad (18)$$

만약 필터가 정규 조건을 만족시키면, 비례 및 wavelet 함수는 다음과 같이 구성된다:

우선, J 단계를 갖는 직각 octave-band filter bank 를식(6), (7)과 같이나타낸다. 그리고 나서 이 반복된 필터를 비례 함수, $\varphi^{(i)}(t)$ 와 wavelets, $\psi^{(i)}(t)$ 과 연관시킨다.

$$\varphi^{(i)}(t) = 2^{i/2} g_0^{(i)}[n], \frac{n}{2^i} \le t \le \frac{n+1}{2^i}, \quad (19)$$

$$\psi^{(i)}(t) = 2^{i/2} g_1^{(i)}[n], \frac{n}{2^i} \le t \le \frac{n+1}{2^i}. \quad (20)$$

그러면 $L_2(\Re)$에서 다음과 같은 Fourier 변환을 갖는 극한 함수 $\varphi(t)$ 와 $\psi(t)$ 가 존재한다:

$$\Phi(\varpi) = \prod_{k=1}^{\infty} M_0\left(\frac{\varpi}{2^k}\right)$$

$$\Psi(\varpi) = M_1\left(\frac{\varpi}{2}\right)\prod_{k=2}^{\infty} M_0\left(\frac{\varpi}{2^k}\right) \quad (21)$$

3.4.2 반복적 재분할 (Recursive subdivision)

이 방법은 프로그래밍하기 빠르고 따라서 거의 모든 wavelets 계산은 이 방법을 사용한다. Scaling 함수 $\varphi(t)$ 의 설계는 반복(recursion)과 직접적으로 관련이 있다. 만약 t = 모든 정수에서 $\varphi(t)$ 의 값을 알면, 2-scale 식의 반복을 통해 정수 사이에서 $\varphi(t)$ 의 값을 알 수 있고 결국엔 모든 t = k/2^i 에서 $\varphi(t)$ 의 값을 알 수 있게 된다.

4. 응용 가능 분야 -시계열 분석과 시스템 인식

신호처리를 비롯하여 시계열 분석 및 시스템 인식 등 몇몇 분야에서 wavelets 의 응용에 대한 거대한 관심이 일어났다.

시계열 분석을 위한 wavelets 응용의 방법론은 몇 가지 내용으로 문헌에 나타나 있다. Whitcher 등(2000)은 전통적인 cross-spectrum 의 대안으로 wavelet 의 correlation-covariance 를 정의하고 단변량(univariate) 시계열 분석에 적용하였다. Gençay 등(2001)과 Arino (1996)는 쉬운 해석과 좀 더 정확한 예측을 위해 시계열을 장기 성향(trend)과 계절 성향들로 분해하는데 이산 wavelet 변환을 사용하였다. Capobianco (1997)는 니케이 주가에서 잡음을 제거하는데 DWT 를 이용하였고 Torrence 와 Compo (1998)는 wavelet power spectra 에 대한 새로운 통계적 중요도 시험법을 개발하여 STFT 와 함께 ENSO(El Niño-Southern Oscillation) series 를 분석하는데 사용하였다. 한편, 통계학적 관점에서, Neumann (1996)는 spectral density 의 계산을 위해, Nason (1994)는 non-parametric regression 을 위해 wavelets 를 사용하였다. 통계학적 측면에서의 wavelets 에 관한 이론적 발전과는 별도로, 대부분의 응용은 주로 stationary 공정 데이터의 잡음 제거나 성향 제거에만 사용되었고 non-stationary 공정에의 적용은 매우 드물다. 날카로운 불연속점 등을 포함하는 신호에서 잡음의 제거나 공장의 일시적인 외란 등을 감지와 같은 경우에는 wavelets 는 기존이 방법보다 아주 좋은 성능을 보이지만 그 밖의 다른 경우에는 기존 방법보다 별다른 차이점을 보이지 않는다.

시스템 인식을 위한 Wavelets 의 방법론도 거의 같은 경향을 보인다. Palavajjhala 등 (1996) 은 입출력 데이터의 잡음 제거를 위한 선행 필터로서 wavelets 을 사용하였고

Pati 등(1993)은 wavelet 근사를 이용하여 안정한 선형 시스템의 모델 차수감소를 위한 방법론을 제시하였다. 또한 Takahashi 등(1998)과 Nikolaou & Vuthandam (1998) 은 FIR 모델을 만드는데 wavelets 을 사용하였는데 두 방법은 매우 유사하며 차이점은 Takahashi 등은 wavelet packets 변환을 사용하였고 Nikolaou 와 Vuthandam 는 DWT 를 사용하였다는 점이다. 선형 시변(time-varying) 시스템이나 비선형 시스템에 wavelets 를 적용한 예는 드물다. Tsatsanis 와 Giannakis (1993)는 시변 매개변수를 wavelet basis 를 가지고 확장시켜(expansion) 원래의 문제를 시불변 문제로 바꾸는 매개변수 인식(parametric identification)을 시변 시스템에 적용하였다. 또한 그들은 공장의 일시적인 외란 등을 감지하는데도 wavelets 을 사용하였다. Carrier 와 Stephanopoulos (1998)는 wavelet 분해를 변조함수 방법과 연계하여 시변 또는 비선형 시스템의 제어관련(control-relevant) 시스템 인식에 사용하였다. wavelets 과 filter bank 의 연관성을 생각해 보면 제어관련 시스템 인식에서의 wavelets 의 사용은 합당한 것처럼 생각된다.

상기한 바와 같이, wavelets 는 시계열 분석과 시스템 인식의 분야에서 stationary 시스템의 de-noising 또는 de-trending 에 사용되고 있으며 non-stationary 시스템의 시계열 분석과 시스템 인식에는 그다지 사용되지 않았다. 그러나 wavelets 는 시간-주파수 국부화 특성 때문에 특히 날카로운 불연속점 등을 포함하는 신호에서 잡음의 제거나 공장의 일시적인 외란 등을 감지하는데 탁월하다.

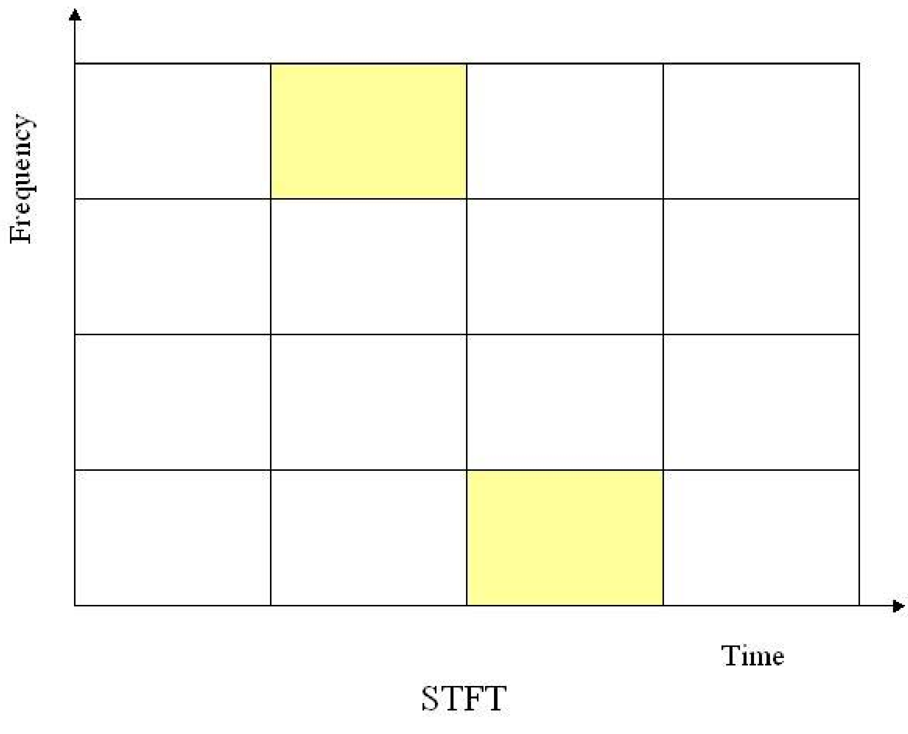

Fig. 3. Time-frequency tiling of STFT. The widths of tlining remain same along the time-frequcy axes.

1. B. Whitcher, P. Guttop and D. Percival, “Wavelet analysis of covariance with application to atmospheric time series,” J. of Geophysical Research – Atmospheres, Vol. 105 (D11), No.14, p.941, 2000.
2. R. Gençay, F. Selçuk and B. Whitcher, “Differentiating Intraday Seasonalities Through Wavelet Multi-Scaling,” Physica A, 2001., Forthcoming.
3. M. Arino, “Forecasting Time Series via Discrete Wavelet Transform,” Society of Computational Economics. Second International Conference on Computing in Economics and Finance, Geneva, Switzerland, p.26, June 1996.
4. E. Capobianco, “Wavelet de-noised financial time series,” Int. Workshop on Stochastic Model Building and variable Selection, Duke Univ. Oct., 1997.
5. C. Torrence and G. Compo, “A practical guide to wavelet analysis,” Bulletin of American Meteorological Society, Vol. 79, No. 1, Jan., 1998.
6. M. Neumann, “Spectran density estimation via nonlinear wavelet methods for stationary non-Gaussian time series,” J. of Time Series Analysis, Vol. 17, p.601, 1996.
7. S. Palavajjhala, R. Motard and B. Joseph, “Process identification using discrete wavelet transforms:design of prefilters,” AICHE J., Vol. 42, No. 3, p.777, 1996.
8. Y. Pati, R. Rezaiifar, P. Krishnaprasad and W. Dayawansa, “A fast recursive algorithm for system identification and model reduction using rational wavelets,” Proc. Asilomar Conf. on Signals, Systems amd Computers, Vol. 1, Pacific Grove, CA. p.35, 1993.
9. M. Takahashi, H. Ohmori and A. Sano, “Impulse response identification by use of wavelet packets decomposition,” Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, p.211, 1998.
10. M. Nikolaou and P. Vuthandam, “FIR Model Identification: Parsimony Through Kernel Compression with Wavelets,” AICHE J., Vol. 44, No. 1, p.141, 1998.
11. M. Tsatsanis and G Giannakis, “Time-varying system identification and model validation using wavelets,” IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 41, No. 12, p.3512, 1993.
12. M. Tsatsanis and G Giannakis, “A basis expansion approach for detecting transient plant disturbances and jumps,” Proc. Conf. On Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, p3412 (1994).
13. J. Carrier and G. Stephanopoulos, “Wavelet-Based Modulation in Control-Relevant Process Identification,” AICHE J., Vol. 44, No. 2, p.341, 1998.