신호 해석에서의 Wavelets 과 Filter Bank

1. Introduction

신호해석에서의 일차적인 목표는 신호의 특성(feature)을 각각의 응용 목적에 적합한 방법으로 표현하는 것이라 할 수 있다. 선형 분해(decomposition)법은 원래의 신호를 basis 함수에 의해 만들어진 subspace 위로 투영(projection)하는 것으로 신호처리에서 가장 널리 쓰이는 방법이다. 이 방법에는 wavelets 과 filter bank 등이 포함된다. Filter banks 는 본래 subband speech coding 을 위해 개발되었으며 wavelets 은 non-stationary 신호 분석을 위한 Short-Time Fourier Transform (STFT) 의 대안으로 개발되었다. 이 두 가지 방법은 주파수 분해 측면에서 매우 밀접한 관계가 있으며 이 때문에 wavelets 또는 wavelets frame 을 만드는데 filter bank 이론이 이용된다.

2. Filter Bank 이론

Filter banks 는 음성 subband coder 나 transmultiplexers (time-division multiplexed data 를 frequency-division multiplexed data 로 바꾸어 주는 장치)에 자주 쓰이던 convolution 구조를 가지고 있다. Filter bank 는 분석 필터, down-sampler, upsampler 그리고 합성 필터의 조합을 이용하여 이산 신호 $x[n]$을 N 개의 channels (subbands)로 분해한다. (Fig. 1 참조) 가장 근본적인 문제는 완전 복원 (perfect reconstruction) filter banks (즉, $x[n] = y[n]$)를 갖도록 H_i and G_i 를 선택하는 것이다.

Fig. 1 의 구조에서 다음과 같은 몇 가지 변형이 가능하다: (1) channels 의 수 N 이 M 과 같을 때 (critically-sampled filter bank), (2) 혹은 클 때 (over-sampled filter bank), (3) 필터가 선형 상이거나 대칭제한 조건을 가질 때, 등등. Filter banks 설계는 완전복원 조건 하에 특정 목적함수를 최대 또는 최소화하는 최적화문제이며 그 결과로 필터는 주파수 혹은 시간 영역에서 “최적” 특성을 갖는다.

2.1 완전복원(PR) 조건과 필터설계

대수적인 PR 조건들은 필터의 길이나 causality 와 무관하다. 실수의 계수를 갖는 critically sampled M-channel filter 의 경우, 동등한 PR 조건들은 다음과 같다:

(a) $\langle h_i[Mp-n], g_j[n-Mq]\rangle = \delta[i-j]\delta[p-q] \quad i, j \in \{0,1,2,..., M-1\}$

(b) $\sum_{i=0}^{M-1} G_i(z)H_i(z) = M$ (no distortion)

$\sum_{i=0}^{M-1} G_i(z)H_i(W_M^n z) = M \quad m = 0,1,2,..., M-1$ (alias cancellation)

(c) $\boldsymbol{G}_m(z)\boldsymbol{H}_m(z) = M\boldsymbol{I} = \boldsymbol{H}_m(z)\boldsymbol{G}_m(z)$

(d) $\boldsymbol{G}_p(z)\boldsymbol{H}_p(z) = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{H}_p(z)\boldsymbol{G}_p(z)$

(e) $\boldsymbol{T}_s\boldsymbol{T}_a = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}_a\boldsymbol{T}_s$ (for FIR filters)

이때 $W_N = e^{-j2\pi/N}$ 이며 $\boldsymbol{H}_m(z)$ 와 $\boldsymbol{G}_m(z)$ 는 변조된 필터를 갖는 분석 및 합성 변조 행렬(modulation matrices)이다. 또한 $\boldsymbol{H}_p(z)$ 와 $\boldsymbol{G}_p(z)$ 는 필터의 다상(polyphase) 요소를 갖는 분석 및 합성 다상 행렬이고, $\boldsymbol{T}_a$ 와 $\boldsymbol{T}_s$ 는 필터의 impulse 응답을 갖는 분석 및 합성 행렬이다. 2-channel 의 경우 (M=2),

$$\boldsymbol{H}_m(z)=\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{G}_m(z)=\begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \\ G_0(-z) & G_1(-z) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{H}_p(z)=\begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}_p(z)=\begin{bmatrix} G_{00}(z) & G_{10}(z) \\ G_{01}(z) & G_{11}(z) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{T}_a=\begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}_{K-1} & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_0 & \cdots & \boldsymbol{A}_{K-2} & \boldsymbol{A}_{K-1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},\ \boldsymbol{T}_s^T=\begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \boldsymbol{S}_0^T & \boldsymbol{S}_1^T & \cdots & \boldsymbol{S}_{K'-1}^T & \boldsymbol{0} & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}_0^T & \cdots & \boldsymbol{S}_{K'-2}^T & \boldsymbol{S}_{K'-1}^T & \cdots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \quad (3)$$

이때, 부분행렬 $\boldsymbol{A}_i$ 와 $\boldsymbol{S}_i$ 는 (K 와 K’ 는 zeros 의 개수)

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{bmatrix} h_0[2K-1-2i] & h_0[2K-2-2i] \\ h_1[2K-1-2i] & h_1[2K-2-2i] \end{bmatrix},\ \boldsymbol{S}_i=\begin{bmatrix} g_0[2i] & g_1[2i] \\ g_0[2i+1] & g_1[2i+1] \end{bmatrix}. \quad (4)$$

이것은 biorthogonal filter bank 를 위한 PR 조건이며 orthogonal 의 경우 $h_i[n]=g_i[-n]$ 이므로, 위의 PR 조건은 다음과 같이 된다:

(a’) $\langle g_i[n-Mp], g_j[n-Mq]\rangle=\delta[i-j]\delta[p-q] \quad i,j\in\{0,1,2,...,M-1\}$

(c’) $\boldsymbol{G}_m(z)\boldsymbol{G}_m^T(z^{-1})=M\boldsymbol{I}=\boldsymbol{G}_m^T(z^{-1})\boldsymbol{G}_m(z)$

(d’) $\boldsymbol{G}_p(z)\boldsymbol{G}_p^T(z^{-1})=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{G}_p^T(z^{-1})\boldsymbol{G}_p(z)$

(e’) $\boldsymbol{T}_s\boldsymbol{T}_s^T=\boldsymbol{I}=\boldsymbol{T}_a^T\boldsymbol{T}_a,\ \boldsymbol{T}_a=\boldsymbol{T}_s^T$

이러한 Filter banks 의 설계는 매개 변수화를 통해 unconstrained 최적화문제로 된다. 예를 들면, (K-1) degree polynomial 을 갖는 $M\times M$ FIR lossless system 이 다음과 같은 형태로 매개 변수화 된다는 사실을 이용하여

$$\boldsymbol{L}_{M-1}=\boldsymbol{V}_{K-1}(z)\cdot\boldsymbol{V}_{K-2}(z)\cdots\boldsymbol{V}_1(z)\cdot\boldsymbol{L}_0,$$

(이때 $\boldsymbol{L}_0$ 는 $M\times M$ unitary 행렬이고 $\boldsymbol{V}_k(z)=\left(\boldsymbol{I}-\left(1-z^{-1}\right)\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^T\right)$.)

합성 다상 행렬 $\boldsymbol{H}_p(z)$ 은 위의 매개 변수화 된 형태로 표현될 수 있고 FIR filter bank 설계는 다음과 같이 된다: 목적함수(일반적으로 필터 근사오차)를 최소화 하도록 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 와 $\boldsymbol{L}_0$ 를 선택한다.

이 filter bank 설계가 효과적이긴 하지만 이 방법은 보통의 channel 크기나 필터 길이에 대해서도 비현실적이 된다. 이 문제에 대한 한 가지 해결책은 원형(prototype) 필터의 변조된 필터를 사용하는 것이다. Cosine 변조 filter banks 에서는 $h_{pr}[n]$의 cosine 변조를 통해 $h_k[n]$를 얻는다.

$$h_k[n]=\frac{1}{\sqrt{N}}h_{pr}\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2N}\left(n-\left(\frac{L-1}{2}\right)\right)+\phi_k\right) \quad (5)$$

일반적인 경우, 상(phase), $\phi_k=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ 는 aliasing 항을 없애고 만약 필터의 길이, L 이 $2N$ 과 같다면 완전 복원을 얻게 된다. 각 필터는 변조된 필터와 직각이며 단위 크기(norm)를 갖는다. 따라서, 직각 LOT (Lapped Orthogonal Transform)가 된다.

2.2 가지 구조(Tree structured)/Over-sampled Filter bank

M-channel filter bank 를 만드는 한가지 쉬운 방법은 2-channel filter banks 를 이용하여 subband 신호를 계속 분해함으로써 가지 구조의 filter bank 를 만드는 것이다. 만약 lowpass channel 만을 계속하여 2-channel 로 나눈다면, 그 filter bank 는 *constant-Q* filter bank, constant relative bandwidth filter bank, 또는 *octave-band filter bank* 로 불리

운다. 이는 각각의 highpass 출력이 입력 대역(bandwidth)의 octave 를 포함하기 때문이다 (Fig. 2 참조). 만약 2-channel filter bank 가 PR 조건을 만족시킨다면, 이 구조는 이산 (bi)orthogonal wavelet 변환을 수행한다. *novel identity* 를 이용하여, J 단계를 갖는 orthonormal octave-band filter bank 와 동일한 필터는 다음과 같다.

$$G_0^{(J)}(z) = G_0^{(J-1)}(z) G_0(z^{2^{J-1}}) = \prod_{K=0}^{J-1} G_0(z^{2^K}) \quad (6)$$

$$G_1^{(j)}(z) = G_0^{(j-1)}(z) G_1(z^{2^{j-1}}) = G_1(z^{2^{j-1}}) \prod_{K=0}^{j-2} G_0(z^{2^K}) \quad j = 1, \ldots, J. \quad (7)$$

좀 더 일반적인 가지구조의 filter bank 도 가능하며 임의의 가지구조를 갖는 filter bank, 다시 말해서 모든 channel 들이 2-channel filter bank 에 의해 분해되는 filter bank 는 매우 유연한 신호분해를 가능케 한다. 이는 wavelet packet 분해라 불리 운다. wavelet packets 의 가능성은 다양한 종류의 직각 basis 를 제공한다는데 있다. 왜냐하면 각각의 가지구조는 다른 시간-주파수 분해능을 갖기 때문이다.

Fig. 1 에서 $N>M$ 일 경우엔 over-sampled filter bank 라 불리는데 이것은 over-complete expansion 을 만들기 때문이다. 다시 말해서, expansion 에 사용된 일련의 함수 개수가 실제 필요한 것보다 많아서 비록 basis 함수처럼 쓰였지만 실제로는 dependent 하다. 몇몇 응용에서 이러한 expansion 은 bases 보다 유용한데 이는 filter bank 설계가 쉽고 oversampling 으로 인해 time invariance 가 줄어들기 때문이다. (critically-sampled filter bank 는 upsampler 와 downsampler 를 포함하고 있기 때문에 LTV 혹은 LPTV 씨스템이다.). upsampler 와 downsampler 가 쓰이지 않은 극단적인 경우에분 것 및 합성 필터는 tight frame 을 이루며 중복(redundancy) 요소 R 은 M 과 같다. Frame 의 정의는 나주에 정의 될 것이다.

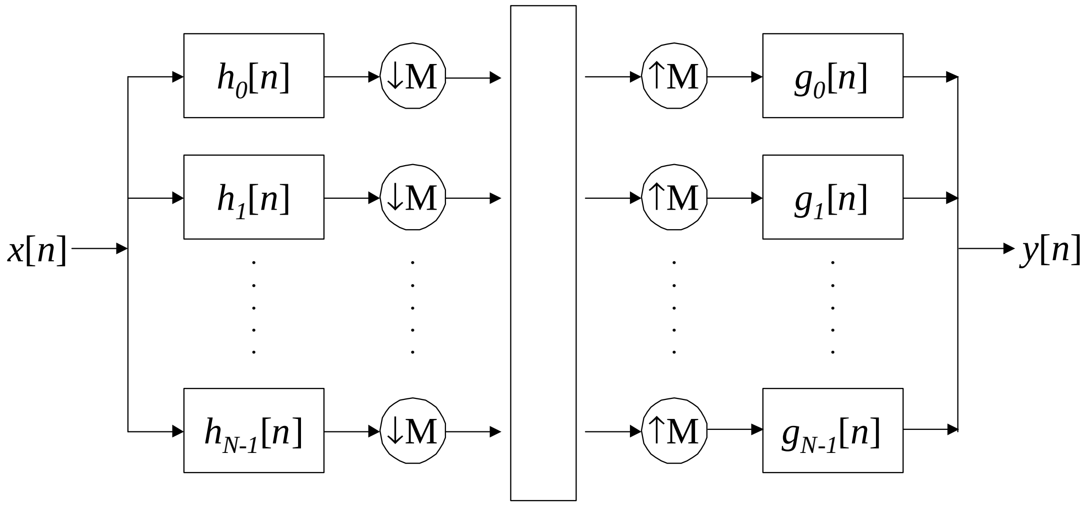

Fig. 1. A general N-channel filter bank. When N>M, it is oversampled filter bank which is related to wavelet frame. When N=M, it is critically sampled filter bank

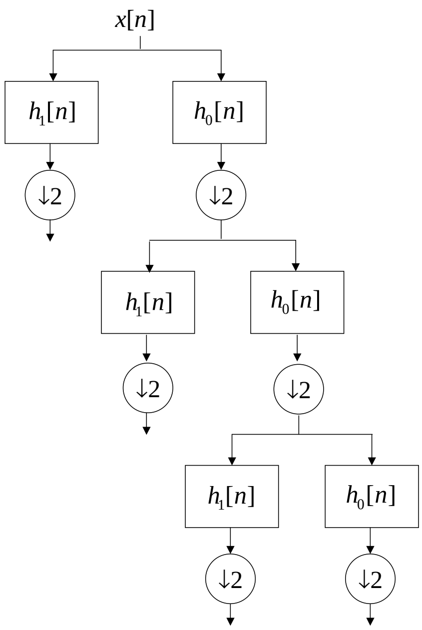

Fig. 2. An octave-band filter bank with 3 stages (analysis part only). If $h_i[n]$ is orthonormal and $g_i[n]=h_i[-n]$, the overall structure (together with synthesis part) implements an orthonormal discrete-time wavelet series expansion.